

## NĂNG LỰC MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC CỦA HỌC SINH PHỔ THÔNG

Nguyễn Danh Nam

*Phòng Đào tạo, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên*

**Tóm tắt.** Bài báo tìm hiểu về năng lực mô hình hóa trong học tập toán của học sinh phổ thông. Từ đó đánh giá cấp độ mô hình hóa trong giải các bài toán, đặc biệt là các bài toán có liên hệ với thực tiễn. Nghiên cứu cho thấy năng lực mô hình hóa của học sinh phổ thông Việt Nam còn nhiều hạn chế, hầu hết các em chỉ đạt được ở cấp độ thấp. Điều này chỉ ra những bất cập trong nội dung chương trình sách giáo khoa hiện hành, trong đó tính ứng dụng của toán học trong giải quyết các vấn đề của cuộc sống hằng ngày chưa được coi trọng. Kết quả nghiên cứu đã khẳng định phương pháp mô hình hóa trong dạy học Toán góp phần bồi dưỡng năng lực mô hình hóa toán học của học sinh, giúp các em biết sử dụng công cụ và ngôn ngữ của toán học để giải quyết những tình huống nảy sinh trong thực tiễn.

**Từ khóa:** Mô hình, mô hình hóa, toán học hóa, năng lực mô hình hóa.

### 1. Mở đầu

Mục tiêu quan trọng của chương trình toán học phổ thông đó là hình thành và phát triển cho học sinh khả năng vận dụng tri thức toán học để giải quyết những tình huống nảy sinh từ thực tiễn cuộc sống. Điều này được chương trình đánh giá học sinh quốc tế PISA quan tâm nghiên cứu từ năm 2000. Chương trình PISA đánh giá 8 năng lực đặc trưng của toán học đó là: Tư duy và lập luận (thinking and reasoning); suy luận và chứng minh toán học (argumentation); giao tiếp toán học (communication); mô hình hóa (modeling); nêu và giải quyết vấn đề (problem posing and solving); biểu diễn (representation); sử dụng kí hiệu và ngôn ngữ toán học (using symbolic, formal and technical language and operations); sử dụng công cụ tính toán (using of aids and tools). Kết quả thu được từ chương trình PISA sẽ giúp các nước đánh giá được những năng lực toán học cốt lõi của học sinh phổ thông, từ đó xây dựng chiến lược phát triển chương trình giáo dục toán học quốc gia. Trong các năng lực trên, mô hình hóa là năng lực được nhiều quốc gia trên thế giới đề cập đến từ hai thập niên trước và giữ vị trí ngày càng quan trọng trong chương trình môn Toán phổ thông của nhiều nước như Hoa Kỳ, Đức, Pháp, Anh, Trung Quốc, Singapore, ... [1], [4]. Mô hình hóa trong dạy học toán là quá trình giúp học sinh tìm hiểu, khám phá các tình huống nảy sinh từ thực tiễn bằng công cụ và ngôn ngữ toán học như hình vẽ, bảng biểu, hàm số, đồ thị, phương trình, kí hiệu, sơ đồ, công thức, ... [11]. Do đó, mô hình hóa giúp học sinh nhận biết được ý nghĩa, vai trò của kiến thức toán học trong cuộc sống; phát triển khả năng phân tích, suy luận, lập luận và giải quyết vấn đề toán học trong những tình huống, hoàn cảnh khác nhau; phát triển tư duy phê phán và khả năng liên hệ kiến thức toán học với các môn học khác.

Ngày nhận bài: 10/7/2015. Ngày nhận đăng: 20/10/2015.

Liên hệ: Nguyễn Danh Nam, e-mail: [danhnam.nguyen@dhsptn.edu.vn](mailto:danhnam.nguyen@dhsptn.edu.vn)

Khả năng xây dựng mô hình toán học từ tình huống thực tiễn được coi là cơ sở của việc “toán học hóa các tình huống thực tiễn”. Thuật ngữ “toán học hóa” có nghĩa là sử dụng ngôn ngữ toán học chuyển các vấn đề trong cuộc sống hàng ngày về dạng biểu diễn toán học. Năng lực toán học hóa tình huống thực tiễn là tổng hợp của năng lực thu nhận thông tin toán học từ tình huống thực tiễn; năng lực chuyển đổi thông tin giữa thực tế cuộc sống, toán học và năng lực thiết lập mô hình toán học của tình huống thực tiễn. Theo Trần Vui [12], quá trình toán học hóa được đặc trưng bởi 5 khía cạnh sau: Xây dựng vấn đề xuất phát từ một tình huống thực tiễn; tổ chức vấn đề dựa trên kiến thức toán học đã học; đơn giản hóa vấn đề thành bài toán thông qua quá trình lập giả thiết, tổng quát hóa và hình thức hóa vấn đề; giải quyết bài toán và chuyển lời giải của bài toán thành vấn đề có ý nghĩa đối với tình huống thực tiễn. Chính vì vậy, để nâng cao sự hiểu biết về toán học và vai trò của toán học trong cuộc sống cho học sinh, giáo viên không thể coi nhẹ việc dạy học cách thức xây dựng mô hình toán học để giải quyết một vấn đề nào đó do thực tiễn đặt ra.

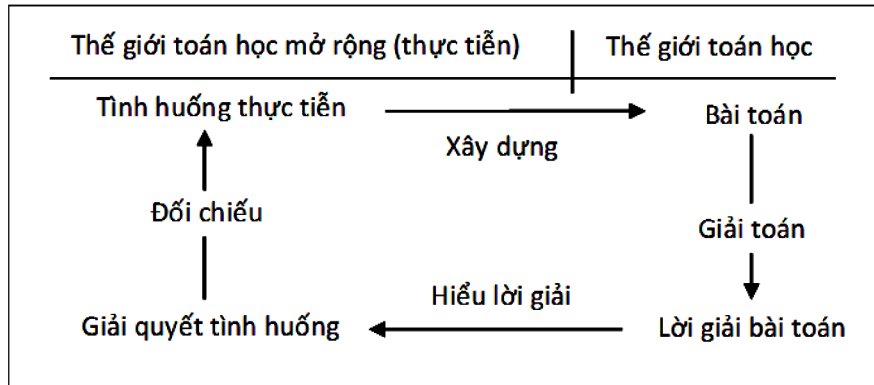
Dạy học bằng mô hình hóa hay phương pháp mô hình hóa trong dạy học là quá trình giáo viên tổ chức các hoạt động giúp học sinh xây dựng mô hình toán học để giải quyết các vấn đề trong thực tiễn. Do vậy, quy trình dạy học bằng mô hình hóa được tiến hành theo các bước sau đây: Xuất phát từ một vấn đề thực tiễn → Xây dựng mô hình toán học → Trả lời cho bài toán thực tiễn → Thể chế hóa tri thức cần giảng dạy bằng cách nêu định nghĩa hay định lí, công thức → Vận dụng vào giải các bài toán thực tiễn khác mà tri thức đó cho phép xây dựng một mô hình toán học phù hợp. Do đó, tri thức cần giảng dạy sẽ được hình thành từ quá trình học sinh khám phá các vấn đề nảy sinh từ thực tiễn với tư cách là kết quả hay là phương tiện giải quyết vấn đề. Tuy nhiên, trong thực tiễn dạy học học sinh còn gặp nhiều khó khăn. Khó khăn này không chỉ dừng lại ở mức độ trừu tượng của toán học, hay ở sự quá tải của chương trình, mà nó còn bao gồm cả nhu cầu muốn được biết mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn không được thỏa mãn. Theo kết quả điều tra 223 học sinh của một số trường trung học phổ thông trên địa bàn tỉnh Thái Nguyên, chúng tôi nhận thấy trong quá trình học toán các em có mong muốn: Được ứng dụng những gì mình học vào thực tế cuộc sống; Được giảng về mối quan hệ giữa lí thuyết và ứng dụng kĩ càng hơn; Có nhiều ví dụ sinh động hơn từ thực tế, có thêm nhiều liên hệ với thực tiễn; Giảm bớt kiến thức, thêm bài tập thực tế; Có thêm nhiều hình vẽ, mô hình, ứng dụng trong các giờ học trên lớp và ngoại khóa. Cụ thể, 89,69% số học sinh muốn biết về ứng dụng của toán học trong thực tiễn; có 78,34% không bao giờ tự tìm hiểu những ứng dụng thực tiễn của toán học; 79,09% cho rằng môn toán rất khô khan, không thấy ứng dụng nhiều trong cuộc sống. Chúng tôi tiếp tục tiến hành phỏng vấn 21 giáo viên dạy toán tại các trường trên, kết quả cho thấy 25% số giáo viên quan tâm đến việc dạy học tăng cường mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn; 67,86% cho rằng cần tăng cường các câu hỏi có nội dung thực tiễn; tuy nhiên chỉ có 3,57% số giáo viên thường xuyên hướng dẫn học sinh giải quyết những tình huống thực tế (ngoài chương trình sách giáo khoa). Đặc biệt, hầu hết giáo viên đều đánh giá cao vai trò của hoạt động mô hình hóa trong dạy học toán. Tuy nhiên, thực tế nghiên cứu chúng tôi nhận thấy năng lực mô hình hóa của cả giáo viên và học sinh còn yếu. Khi khai thác tính liên hệ thực tiễn của các kiến thức toán học, đa số giáo viên đều sử dụng các tình huống, ví dụ có sẵn trong sách giáo khoa. Giáo viên không biết xây dựng tình huống dạy học cũng như các bài tập mô hình hóa xuất phát từ các vấn đề thực tiễn. Về phía học sinh, hầu hết các em đều không giải quyết trọn vẹn các bài tập mô hình hóa trong sách giáo khoa, đặc biệt là kĩ năng thiết lập và biểu diễn các mô hình toán học. Thực trạng này cũng được Qi Dan và Jinxing Xie làm sáng tỏ với kết quả điều tra tương tự đối với giáo viên và học sinh của Trung Quốc [3]. Vì thế, vận dụng phương pháp mô hình hóa trong dạy học toán sẽ góp phần đưa ý tưởng toán học gắn liền với thực tiễn vào trong lớp học toán ở nhà trường. Từ đó, hình thành và bồi dưỡng cho học sinh năng lực mô hình hóa toán học, giúp các em biết vận dụng linh hoạt kiến thức toán học trong nhà trường để giải quyết các vấn đề nảy sinh từ thực tiễn cuộc sống [11].

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Năng lực mô hình hóa toán học

Trong chương trình sách giáo khoa môn Toán của Việt Nam có tương đối ít các bài toán về mô hình hóa, chỉ chiếm khoảng 2% đến 5% số lượng các bài toán, bài tập. Bài toán có thể được xây dựng từ vấn đề thực tiễn hoặc từ các vấn đề thuộc các môn học khác như Sinh học, Hóa học hay Vật lí. Sau đó, các công cụ và ngôn ngữ toán học được sử dụng để thiết lập các mô hình. Đây gọi là quá trình toán học hóa. Bài toán sau đó được giải bằng kiến thức toán học. Cuối cùng lời giải được hiểu trong ngữ cảnh thực tế [5, 11]. Theo Swetz & Hartzler (1991), quy trình mô hình hóa toán học gồm 4 giai đoạn chủ yếu sau đây [6], [10]:

- Giai đoạn 1 (Toán học hóa): Hiểu vấn đề thực tiễn, xây dựng các giả thuyết để đơn giản hóa vấn đề, mô tả và diễn đạt vấn đề bằng các công cụ và ngôn ngữ toán học.
- Giai đoạn 2 (Giải bài toán): Sử dụng các công cụ và phương pháp toán học thích hợp để giải quyết vấn đề hay bài toán đã được toán học hóa.
- Giai đoạn 3 (Thông hiểu): Hiểu ý nghĩa lời giải của bài toán đối với tình huống trong thực tiễn (bài toán ban đầu).
- Giai đoạn 4 (Đối chiếu): Xem xét lại các giả thuyết, tìm hiểu các hạn chế của mô hình toán học cũng như lời giải của bài toán, xem lại các công cụ và phương pháp toán học đã sử dụng, đối chiếu thực tiễn để cải tiến mô hình đã xây dựng.



**Hình 1: Quá trình mô hình hóa trong dạy học toán**

Có nhiều định nghĩa khác nhau về năng lực mô hình hóa và nó gồm nhiều kĩ năng thành phần. Blomhøj và Jensen định nghĩa năng lực mô hình hóa là khả năng thực hiện đầy đủ các giai đoạn của quá trình mô hình hóa trong một tình huống cho trước [2]. Maab định nghĩa năng lực mô hình hóa bao gồm các kĩ năng và khả năng thực hiện quá trình mô hình hóa nhằm đạt được mục tiêu xác định [9]. Như vậy có thể hiểu năng lực mô hình hóa là khả năng thực hiện đầy đủ các giai đoạn của quá trình mô hình hóa nhằm giải quyết vấn đề được đặt ra. Nhiều nhà nghiên cứu đã thiết kế hệ thống các tình huống và bài tập mô hình hóa để xác định những kĩ năng mà học sinh cần đạt được để giải quyết tình huống thực tiễn dựa theo quy trình trên (Hình 1) [4, 6, 7]. Từ đó, các nghiên cứu đã chỉ ra các kĩ năng thành phần của năng lực mô hình hóa toán học đó là: (1) Đơn giản giả thuyết; (2) Làm rõ mục tiêu; (3) Thiết lập vấn đề; (4) Xác định biến, tham số, hằng số; (5) Thiết lập mệnh đề toán học; (6) Lựa chọn mô hình; (7) Biểu diễn mô hình bằng biểu đồ, đồ thị; (8) Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn.

Như vậy, sử dụng phương pháp mô hình hóa trong dạy học giúp học sinh phát triển các kỹ năng toán học, đồng thời nó còn hỗ trợ giáo viên tổ chức dạy học theo phương pháp phát hiện và giải quyết vấn đề có hiệu quả hơn và giúp học sinh hiểu sâu kiến thức, rèn luyện các kỹ năng giải quyết vấn đề [5, 6, 7, 9].

## 2.2. Cấp độ mô hình hóa

Các tình huống và bài tập mô hình hóa cần được sắp xếp từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp. Việc học sinh tự mình giải quyết được một bài toán có ý nghĩa rất lớn về mặt tâm lý. Ngược lại, việc thất bại ngay từ bài toán đầu tiên dễ làm cho học sinh mất nhuệ khí, dễ gây tâm trạng bất lợi cho quá trình tổ chức hoạt động tiếp theo. Do đó, trong khi thiết kế hệ thống các tình huống và bài tập mô hình hóa, giáo viên cần chú ý đến các cấp độ mô hình hóa. Sau đây là cách đánh giá cấp độ mô hình hóa dựa theo Ludwig và Xu (2010) [8]:

- *Cấp độ 0*: Học sinh không hiểu tình huống và không thể vẽ, phác thảo hay viết bất cứ cái gì cụ thể về vấn đề.

- *Cấp độ 1*: Học sinh chỉ hiểu tình huống thực tiễn nhưng không cấu trúc và đơn giản tình huống hoặc không thể tìm sự kết nối đến một ý tưởng toán học nào.

- *Cấp độ 2*: Sau khi tìm hiểu vấn đề thực tiễn, học sinh tìm mô hình thật qua cấu trúc và đơn giản hóa, nhưng không biết chuyển đổi thành một vấn đề toán học. Ở cấp độ này, học sinh cần đạt được hai kỹ năng mô hình hóa đầu tiên.

- *Cấp độ 3*: Học sinh có thể tìm ra không chỉ mô hình thật, mà còn phiên dịch nó thành vấn đề toán học, nhưng không thể làm việc với nó một cách rõ ràng trong thế giới toán học. Ở cấp độ này, học sinh cần đạt được các kỹ năng mô hình hóa từ 1 đến 4.

- *Cấp độ 4*: Học sinh có thể thiết lập vấn đề toán học từ tình huống thực tiễn, làm việc với bài toán với kiến thức toán học và có kết quả cụ thể. Ở cấp độ này, học sinh cần đạt được các kỹ năng mô hình hóa từ 1 đến 7.

- *Cấp độ 5*: Học sinh có thể trải nghiệm quá trình mô hình hóa toán học và kiểm nghiệm lời giải bài toán trong mối quan hệ với tình huống đã cho. Ở cấp độ này, học sinh cần đạt được đầy đủ 8 kỹ năng mô hình hóa ở trên.

Dựa trên các kỹ năng và cấp độ mô hình hóa đã được đề xuất, chúng tôi tiến hành nghiên cứu trên 68 học sinh lớp 10 thuộc hai trường học trên địa bàn tỉnh Thái Nguyên, đó là Trường THPT Dương Tự Minh và Trường THPT Ngô Quyền. Các tình huống mô hình hóa được thiết kế nhằm đánh giá về năng lực và cấp độ mô hình hóa toán học của học sinh.

## 2.3. Kết quả nghiên cứu

**Ví dụ 1.** (*Bài toán máy bơm nước*): Một gia đình muốn mua một chiếc máy bơm. Có hai loại với cùng lưu lượng bơm được trong một giờ; loại thứ nhất giá 1,5 triệu đồng, loại thứ hai giá 2 triệu đồng. Tuy nhiên, nếu dùng máy bơm loại thứ nhất thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1.200 đồng, trong khi dùng máy bơm loại thứ hai thì chỉ phải trả 1.000 đồng cho mỗi giờ bơm. Theo bạn gia đình này nên chọn mua loại máy nào để đạt hiệu quả kinh tế cao?

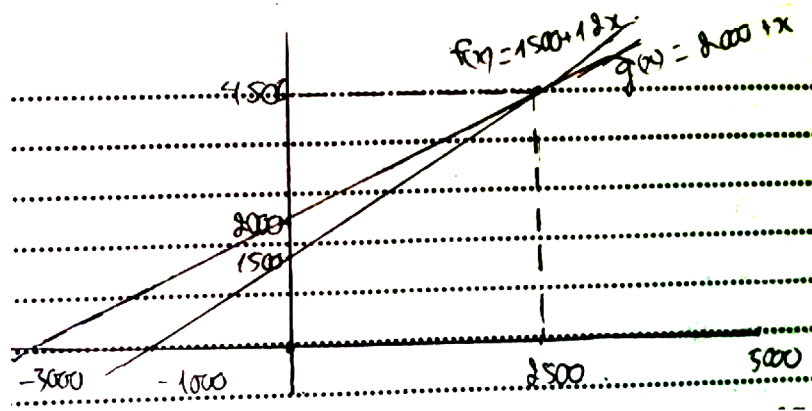
Đối với tình huống trên, học sinh cần lựa chọn máy bơm trong hai loại trên để mua sao cho hiệu quả kinh tế là cao nhất. Như vậy, ngoài giá cả, các em cần quan tâm đến hao phí khi sử dụng máy nghĩa là chi phí cần chi trả khi sử dụng máy trong một khoảng thời gian nhất định. Do đó, thông qua hoạt động này, ta có thể đánh giá được các kỹ năng sau đây: Thiết lập phương trình và hệ phương trình hàm số bậc nhất; Biểu diễn và xác định miền nghiệm của hệ phương trình; Liên hệ toán học với các vấn đề về kinh tế và tối ưu toán học.

Giáo viên hướng dẫn học sinh giải quyết bài toán trên theo 4 giai đoạn của quá trình mô hình hóa như sau:

**Giai đoạn 1 (Toán học hóa):** Kí hiệu  $f(x)$  và  $g(x)$  lần lượt là số tiền (tính bằng nghìn đồng) phải trả khi sử dụng máy bơm loại thứ nhất và loại thứ hai trong  $x$  giờ (bao gồm tiền điện và tiền mua máy bơm). Học sinh biểu diễn  $f(x)$  và  $g(x)$  dưới dạng các biểu thức của  $x$  như sau: Trong  $x$  giờ số tiền phải trả khi sử dụng máy thứ nhất là  $f(x) = 1500 + 1,2x$  (nghìn đồng). Số tiền phải chi trả cho máy thứ hai trong  $x$  giờ là  $g(x) = 2000 + x$  (nghìn đồng).

**Giai đoạn 2 (Giải bài toán):** Học sinh vẽ đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  và hàm số  $y = g(x)$  trên cùng hệ trục tọa độ. Dựa trên đồ thị, học sinh nhận thấy chi phí trả cho hai máy sử dụng là như nhau sau khoảng thời gian  $x_0$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$ . Từ đó, học sinh giải phương trình  $f(x) = g(x)$ :

$$1500 + 1,2x = 2000 + x, 2x = 500 \Leftrightarrow x = 2500 \text{ (giờ)}.$$



**Hình 2: Biểu diễn nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$**

**Giai đoạn 3 (Hiểu và thông dịch):** Quan sát đồ thị học sinh nhận thấy rằng ngay sau khi sử dụng 2500 giờ tức là nếu mỗi ngày dùng 4 tiếng tương đương với khoảng thời gian là không quá hai năm thì máy thứ hai chi phí sẽ thấp hơn rất nhiều so với máy thứ nhất nên chọn mua máy thứ hai thì hiệu quả kinh tế sẽ cao hơn.

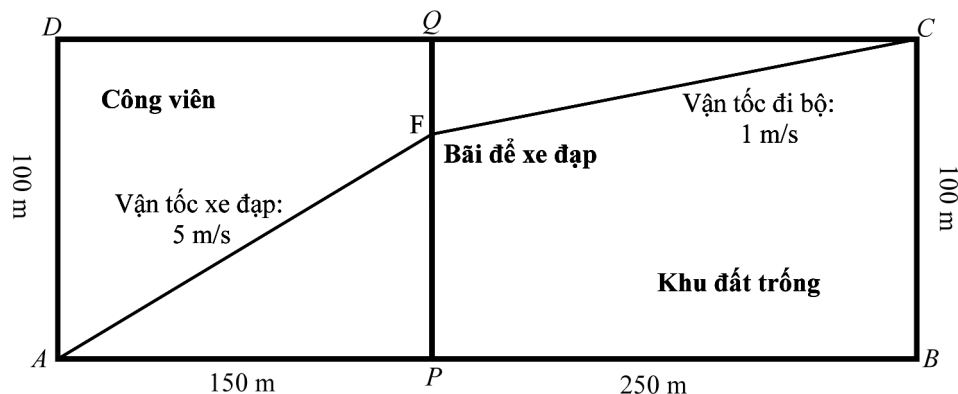
**Giai đoạn 4 (Đối chiếu thực tế):** Học sinh phân tích bài toán trong các trường hợp sau: (1) Nếu thời gian sử dụng máy ít hơn hai năm thì mua máy thứ nhất sẽ tiết kiệm hơn; (2) Nếu thời gian sử dụng nhiều hơn hoặc bằng hai năm thì nên mua máy thứ hai. Tuy nhiên, trong thực tế một máy bơm có thể sử dụng được thời gian khá dài. Do vậy, trong trường hợp này học sinh khuyên gia đình đó nên mua máy thứ hai.

Qua nghiên cứu, chúng tôi nhận thấy đa số học sinh gặp khó khăn trong giai đoạn toán học hóa bài toán và đối chiếu bài toán với thực tế. Kết quả nghiên cứu cho thấy khoảng 72% số học sinh hiểu rõ yêu cầu của bài toán và thiết lập được phương trình biểu diễn số tiền phải chi trả của cả hai máy bơm, trong đó khoảng 60% số học sinh có thể vẽ và đọc hiểu đồ thị hàm số. Chỉ có khoảng 34% số học sinh có thể thông dịch bài toán và đối chiếu với thực tế. Điều này có nghĩa là hầu hết các em chỉ đạt được cấp độ 3 của quá trình mô hình hóa và nhiều học sinh còn gặp lúng túng khi gặp các bài toán về tối ưu toán học.

**Ví dụ 2. (Thiết kế bãi để xe đạp):** Có một công viên và một khu đất trống cạnh nhà ga. Nhằm đảm bảo an toàn trong công viên, thành phố xây dựng đường đi riêng dành cho xe đạp và bãi gửi xe tại khu đất trống để hành khách gửi xe trước khi đi bộ đến nhà ga. Hãy thiết kế phương án giải quyết bài toán trên.

Đây là tình huống mở, chưa có dữ kiện cụ thể. Do vậy, học sinh phải phân tích các yếu tố có liên quan trong tình huống này để đưa ra phương án giải quyết tối ưu. Thông qua bài toán này, ta có thể đánh giá được đầy đủ 8 kĩ năng thành phần trong quá trình mô hình hóa của học sinh.

**Giai đoạn 1 (Toán học hóa):** Học sinh phải đơn giản vấn đề, vẽ hình để mô tả tình huống thực tiễn và xác định thêm các biến số liên quan (Hình 3).



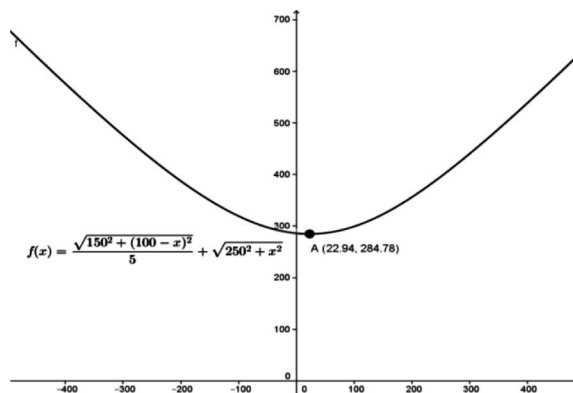
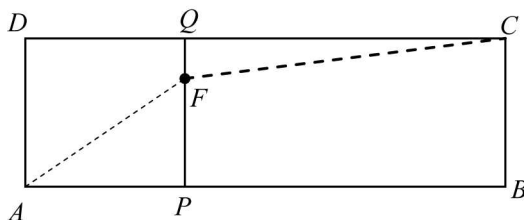
**Hình 3: Thiết kế mô hình bãi đỗ xe đạp**

- Lập giả thuyết và thu thập thêm thông tin như: kích thước công viên và khoảng đất trống, vận tốc trung bình của người đi bộ và xe đạp, giới hạn vận tốc xe đạp trong công viên, mục đích thiết kế (đường đi ngắn nhất, tiết kiệm thời gian nhất, ...).

- Xác định các khái niệm toán học liên quan trước khi thiết kế mô hình trên máy tính: khoảng cách, vận tốc và thời gian.

- Xây dựng mô hình toán học dựa trên các giả thuyết đã đưa ra. Ví dụ như thiết kế để thời gian đi là ít nhất thì biểu thức biểu thị thời gian được mô tả như sau: Tổng số thời gian  $T$  = Khoảng cách đi trong công viên/vận tốc xe đạp + Khoảng cách đi trong khoảng đất trống/vận tốc đi bộ; công viên và mảnh đất có dạng hình chữ nhật; các số liệu về số chiều và vận tốc học sinh có thể tham khảo số liệu trên mạng internet.

Tổng quãng đường từ A đến C xấp xỉ 419.5 (m)  
 Tổng thời gian di chuyển từ A đến C xấp xỉ 285 (giây)  
 Quãng đường từ Q đến F xấp xỉ 23 (m)



**Hình 4: Mô hình hóa tình huống bằng phần mềm hình học động**

**Giai đoạn 2 (Giải bài toán):** Học sinh sử dụng phần mềm hình học động để mô hình hóa tình huống trên, di chuyển điểm F đến các vị trí khác nhau và đo khoảng cách, lập bảng quan sát và xác định vị trí của điểm F sao cho thời gian đi là ngắn nhất (Hình 4). Học sinh lập hàm số biểu diễn thời gian bằng tỉ số giữa quãng đường và vận tốc. Theo định lí Pitago, hàm số biểu diễn thời

gian  $T$  được cho bởi biểu thức sau:  $T = \frac{\sqrt{150^2 + (100 - x)^2}}{5} + \frac{\sqrt{250^2 + x^2}}{1}$ , trong đó  $x$  là độ dài đoạn thẳng  $QF$ . Nếu yêu cầu bài toán là xác định giá trị của  $x$  để thời gian di chuyển là ít nhất thì học sinh cần đi tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $T$  trên.

*Giai đoạn 3 (Hiểu và thông dịch):* Học sinh nhận thấy rằng giá trị  $x$  biểu thị vị trí của bãi để xe đạp, trong khi  $AF$  biểu thị quãng đường đi xe đạp,  $FC$  biểu thị quãng đường đi bộ. Theo kết quả tính toán trên máy tính, học sinh có thể xác định được thời gian ít nhất mà hành khách phải di chuyển đến nhà ga xấp xỉ 285 giây, tương ứng với vị trí thiết kế bãi để xe đạp ở vị trí điểm  $F$  sao cho khoảng cách  $QF$  xấp xỉ 23 mét.

*Giai đoạn 4 (Đối chiếu thực tế):* Sau khi xác định được vị trí bãi để xe đạp, học sinh cần kiểm tra lại tính khả thi của việc xây dựng bãi để xe và tìm hiểu các khó khăn khác. Cụ thể:

- Xem xét lại các giả thuyết: Nếu công viên có dạng hình tròn thì sao? Nếu công viên hay khu đất trống là các đa giác không đều? Có phương pháp nào có thể áp dụng cho tất cả các trường hợp? Giải pháp nào đáp ứng nguyện vọng của người dân (thời gian hay khoảng cách?).

- Suy nghĩ về các phương pháp toán học khác? Sử dụng các phần mềm toán học khác để mô tả?

- Xét đến tính liên môn trong bài toán này: Vật lí, Địa lí, Giao thông,...

Như vậy, thông qua bài toán trên, học sinh được làm quen với việc sử dụng toán học giải quyết tình huống thực tiễn, mô hình hóa trên máy tính để dự đoán, lập giả thuyết, xây dựng mô hình và đối chiếu với ngữ cảnh thực tế. Kết quả nghiên cứu cho thấy khoảng 36% số học sinh không hiểu rõ yêu cầu của bài toán và cho rằng không đủ “số liệu” để giải bài toán. Số còn lại đã xác định được các tham biến liên quan đến bài toán như quãng đường, vận tốc, thời gian và hầu hết các em đều giả thiết hình dạng của công viên và bãi đất trống là hình chữ nhật. Chỉ có khoảng 28% số học sinh xác định được yêu cầu về tính thời gian ít nhất và thiết lập đúng hàm số biểu diễn nó. Tuy nhiên, hơn một nửa trong số học sinh này chỉ dừng lại ở việc giải và thông dịch bài toán mà không đối chiếu với thực tế. Điều này cho thấy hầu hết các em chỉ đạt được cấp độ 3 của quá trình mô hình hóa và chỉ khoảng 10% số học sinh tham gia khảo sát có thể đạt đến cấp độ 4. Dưới đây là bảng tổng hợp kết quả đánh giá về năng lực và cấp độ mô hình hóa của 68 học sinh thông qua các hoạt động mô hình hóa đã được thiết kế trong quá trình nghiên cứu:

**Bảng 1: Đánh giá về năng lực mô hình hóa**

| TT | Kĩ năng thành phần                     | THPT Ngô Quyền |      | THPT Dương Tự Minh |      |
|----|----------------------------------------|----------------|------|--------------------|------|
|    |                                        | N = 38         | %    | N = 30             | %    |
| 1  | Đơn giản giả thuyết                    | 35             | 92,1 | 29                 | 96,7 |
| 2  | Làm rõ mục tiêu                        | 32             | 84,2 | 27                 | 90   |
| 3  | Thiết lập vấn đề                       | 27             | 71,1 | 26                 | 86,7 |
| 4  | Xác định biến, tham số, hằng số        | 21             | 55,3 | 21                 | 70   |
| 5  | Thiết lập mệnh đề toán học             | 16             | 42,1 | 17                 | 56,7 |
| 6  | Lựa chọn mô hình                       | 12             | 31,6 | 11                 | 36,7 |
| 7  | Biểu diễn mô hình bằng biểu đồ, đồ thị | 5              | 13,2 | 5                  | 16,7 |
| 8  | Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn     | 2              | 5,3  | 2                  | 6,7  |

**Bảng 2: Đánh giá về cấp độ mô hình hóa**

| TT | Cấp độ mô hình hóa | THPT Ngô Quyền |      | THPT Dương Tự Minh |      |
|----|--------------------|----------------|------|--------------------|------|
|    |                    | N = 38         | %    | N = 30             | %    |
| 1  | Cấp độ 0           | 3              | 7,9  | 1                  | 3,3  |
| 2  | Cấp độ 1           | 5              | 13,2 | 3                  | 10   |
| 3  | Cấp độ 2           | 5              | 13,2 | 5                  | 16,7 |
| 4  | Cấp độ 3           | 15             | 39,5 | 13                 | 43,3 |
| 5  | Cấp độ 4           | 8              | 21,0 | 6                  | 20   |
| 6  | Cấp độ 5           | 2              | 5,2  | 2                  | 6,7  |

Theo số liệu tại Bảng 1 thì năng lực mô hình hóa của học sinh còn nhiều hạn chế, nhiều học sinh chưa biết cách chuyển một vấn đề trong thực tiễn thành một vấn đề trong toán học. Do vậy, tỉ lệ số học sinh có thể xác định biến, tham số, thiết lập mệnh đề toán học và xây dựng mô hình toán học cho bài toán còn ở mức thấp. Đặc biệt là kĩ năng biểu diễn toán học và liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn còn yếu (chỉ có khoảng từ 5 – 7% số học sinh đạt được cấp độ này). Bảng 2 cho thấy, đa số học sinh chỉ đạt được cấp độ 3 của quá trình mô hình hóa. Hầu hết học sinh còn gặp nhiều lúng túng khi gặp các bài toán mở như bài toán thiết kế bãi đỗ xe đạp ở trên, cụ thể các em chưa biết cách thu thập số liệu thực tế, thiết lập các giả thuyết khác nhau và đối chiếu với các tình huống trong thực tiễn.

### 3. Kết luận

Qua phân tích kết quả nghiên cứu chúng tôi nhận thấy năng lực mô hình hóa toán học của học sinh còn nhiều hạn chế, trong đó có năng lực ứng dụng toán học để giải quyết các vấn đề nảy sinh trong thực tiễn. Điều này cho thấy chương trình toán học phổ thông chưa đề cập đến năng lực mô hình hóa như một năng lực toán học cốt lõi. Do vậy, trong dạy học giáo viên cần tăng cường các bài tập mô hình hóa, đặc biệt là các bài toán liên hệ với thực tế ở dạng “mở” nhằm bồi dưỡng năng lực giải quyết vấn đề. Kết quả của những nghiên cứu tiếp theo về mối tương quan giữa năng lực và cấp độ mô hình hóa với năng lực hiểu biết toán học của học sinh sẽ là cơ sở cho quan điểm tăng cường các tình huống mô hình hóa vấn đề thực tiễn trong chương trình sách giáo khoa phổ thông sau 2015.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Annie Bessot, Nguyễn Thị Nga, 2011. *Mô hình hóa toán học các hiện tượng biến thiên trong dạy học nhờ hình học động dự án nghiên cứu Mira*. Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, 56, 55-63.
- [2] Blomhoj, M., Jensen, T., 2007. *What's all the fuss about competencies?* In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, M. Niss, (Eds.): *Modelling and Applications in Mathematics Education* (ICMI Study 14), 45-56, Springer.
- [3] Qi Dan, Jinxing Xie, 2011. *Mathematical modelling skills and creative thinking levels: An experimental study*. In G. Kaiser et al. (eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer.

- [4] Jensen, T. H., 2007. *Assessing mathematical modelling competency*. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S. Khan (Eds.): *Mathematical Modelling Education, Engineering and Economics (ICTMA12)*, 141-148, Horwood.
- [5] Houston, K., Neill, N., 2003. *Investigating students' modeling skills*. In Q. Ye, W. Blum, S. K. Houston, & Q. Jiang (Eds.): *Mathematical modelling in education and culture (ICTMA 10)*, 54-66, Horwood.
- [6] Richard Lesh, Peter Galbraith, Christopher Haines, Andrew Hurford, 2010. *Modeling students' mathematical modeling competences*. Springer.
- [7] Lingefjård, T., Holmquist, M., 2005. *To assess students' attitudes, skill and competencies in mathematical modeling*. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 24(2-3), 123-133.
- [8] Ludwig, M., Xu, B., 2010. *A comparative study of modelling competencies among Chinese and German students*. *Journal for Didactics of Mathematics*, 31, 77-97.
- [9] Maab, K., 2006. *What are modelling competencies?* *The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113-142.
- [10] Nguyễn Danh Nam, 2013. *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học toán ở trường phổ thông*. Kỷ yếu Hội thảo khoa học cán bộ trẻ các trường sư phạm toàn quốc, Nhà xuất bản Đà Nẵng, 512-516.
- [11] Danh Nam Nguyen, Trung Tran, 2013. *Recommendations for mathematics curriculum development in Vietnam*. *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Educational Reform*, 26-32.
- [12] Trần Vui, 2009. *Sử dụng toán học hóa để nâng cao hiểu biết định lượng cho học sinh trung học phổ thông*. *Tạp chí Khoa học Giáo dục*, 43, 23-26.

## ABSTRACT

### High School Students' Mathematical Modeling Competency

In this paper, the author has investigated on high school students' mathematical modeling competency, focusing on assessing modeling levels in solving mathematical problems, especially real-life situations. It was found that most Vietnamese students had very low level modeling competency. This could be due to the fact that Vietnamese mathematics curriculum and textbooks overlooks the application of mathematics in solving real world problems. This research confirms that modeling methods in teaching mathematics would improve students' mathematical modeling competency. More importantly, it would help students use mathematical tools and languages to connect school mathematics with real life.

**Keywords:** Model, modeling, mathematization, modeling competency.