Chương 1 số phức và hàm biến phức

Ta biết rằng luỹ thừa chẵn của một số thực khác không đều dương, do đó trong lớp số thực không thể khai căn bậc chẵn của một số âm được. Cũng vậy không phải mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm thực.

Do đó ta phải mở rộng khái niệm về số, đưa vào một lớp số mới nhận các số thực làm trường hợp riêng của nó. Lớp số mới đó được gọi là số phức.

1.1 Số phức

1.1.1 Định nghĩa

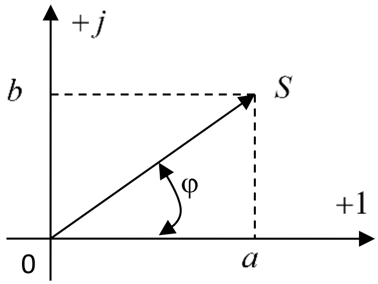
Số phức là biểu thức dạng $s = a + jb$, trong đó a và b là những số thực, j là đơn vị ảo với $j^2 = -1$. a và b lần lượt được gọi là phần thực và phần ảo của số phức s.

Có hai trường hợp đặc biệt của số phức như sau:

- Nếu $b = 0$ thì $s = a$. Như vậy số thực là trường hợp riêng của số phức.
- Nếu $a = 0$ thì $s = jb$, số này được gọi là số ảo thuần tuý.

Hai thành phần của số phức a và b là độc lập, khác hẳn nhau về bản chất. $s = a + jb$ chỉ bằng không khi và chỉ khi $a = 0$ và $b = 0$.

Mỗi số phức s được biểu diễn bằng một điểm S tương ứng trong mặt phẳng phức với hai trục tọa độ như trong hình 1.1. Trong đó, trục thực là trục hoành được kí hiệu là $+1$ và trục ảo là trục tung được kí hiệu $+j$.



Hình 1.1: Biểu diễn số phức *s* trong mặt phẳng phức

Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OS}$ gọi là mô đun (hay *mod*) của số phức s. Mod của số phức s được ký hiệu và tính như sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |s| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Góc tạo bởi véctơ $\overrightarrow{OS}$ và trục thực gọi là *arg* (argument) của số phức s. Arg của số phức s được ký hiệu và tính như sau:

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} \quad (1.2)$$

với giả thiết $a \neq 0$.

1.1.2. Các cách biểu diễn số phức

a. Biểu diễn đại số

$$\begin{aligned} s &= a + jb \\ &= \varepsilon(cos\varphi + j\sin\varphi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ví dụ 1.1

Cho số phức $s_1 = \sqrt{3} - j$. Biểu diễn số phức này dưới dạng đại số (1.3).

Ta có:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{3+1}$$
$$= 2;$$
$$\varphi_1 = arctg(\frac{-1}{\sqrt{3}})$$
$$= -\frac{\pi}{6}$$

Vậy

$$s_1 = 2(cos\frac{\pi}{6} - j\sin\frac{\pi}{6}).$$

b. Biểu diễn dưới dạng mũ

Ta có,

$$s = a + jb$$
$$= \varepsilon(cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Theo công thức Euler thì $e^{j\varphi} = cos\varphi + j\sin\varphi$, suy ra

$$s = \varepsilon e^{j\varphi} \qquad (1.4\ a)$$

trong đó $e \simeq 2,7182$ là cơ số của logarit tự nhiên. Tuy nhiên để thuận tiện ta thường viết

$$s = \varepsilon\angle\varphi \qquad (1.4\ b)$$

Ví dụ 1.2

Cho số phức $s = 5e^{j\pi/3}$, biểu diễn số phức này dưới dạng đại số.

Ta cú:

$$s = 5\angle \pi / 3$$
$$= 5(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3})$$

1.1.3. Số phức liên hợp

Định nghĩa 1.1

Hai số phức được gọi là liên hợp nếu nó có phần thực bằng nhau và phần ảo trái dấu nhau (hay có *mod* bằng nhau và *arg* đối nhau).

Kí hiệu số phức liên hợp của số phức s là s^*. Cho $s = a + jb$. Suy ra,

$$s^* = a - jb \qquad (1.5)$$

Ví dụ 1.3

$$s_1 = 2 + j3 \Rightarrow s_1^* = 2 - j3$$
$$s_2 = 5 - j4 \Rightarrow s_2^* = 5 + j4$$

1.1.4. Các số phức đặc biệt

a. $e^{j\frac{\pi}{2}} = 1\angle\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$.

Vậy $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Ví dụ 1.4

$$s = 100\angle\frac{\pi}{2} = 100j$$

b. $e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1\angle-\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j$.

Vậy $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$.

Ví dụ 1.5

$$s = 50\angle -\frac{\pi}{2} = -50j$$

1.2 Các phép tính đối với số phức

Với các số phức ta cũng có các phép tính như sau: cộng, trừ, nhân, chia và lấy căn như đối với số thực.

1.2.1. Cộng đại số các số phức

Khi cộng đại số các số phức ta thường đưa về dạng đại số.

Định lý 1.1

Tổng (hoặc hiệu) của 2 số phức là một số phức có phần thực bằng tổng (hoặc hiệu) của 2 phần thực và phần ảo bằng tổng (hoặc hiệu) của 2 phần ảo.

Giả sử $s_1 = a_1 + jb_1$ và $s_2 = b_2 + jb_2$. Ta có,

$$s_1 \pm s_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \qquad (1.6)$$

Ví dụ 1.6

Cho $s_1 = 2 + j3$ và $s_2 = 5 - j4$. Tổng và hiệu của hai số phức này được tính như sau:

$$s_1 + s_2 = (2+5) + j[3 + (-4)]$$
$$= 7 - j$$
$$s_1 - s_2 = (2-5) + j[3 - (-4)]$$
$$= -3 + j7$$

1.2.2. Nhân chia các số phức

Khi nhân hoặc chia các số phức ta thường biểu diễn số phức ở dạng mũ (trừ trường hợp thực hiện trên máy tính kỹ thuật).

Định lý 1.2

Tích (hoặc thương) của 2 số phức là một số phức có mod bằng tích (hoặc thương) của 2 mod và arg bằng tổng (hoặc hiệu) của 2 arg.

Giả sử $s_1 = \varepsilon_1 e^{j\varphi_1}$ và $s_2 = \varepsilon_2 e^{j\varphi_2}$. Ta có

$$s_1.s_2 = \varepsilon_1.\varepsilon_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad (1.7\text{ a})$$

và

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (1.7\text{ b})$$

Ví dụ 1.7

Cho $s_1 = 5\angle 45^o$ và $s_2 = 20\angle 30^o$. Tớch và thương của hai số phức được tính như sau:

$$s_1.s_2 = 5.20 e^{j(45^o+30^o)}$$
$$= 100 e^{j75^o}$$
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{5}{20} e^{j(45^o-30^o)}$$
$$= 0,25 e^{j15^o}$$

Chú ý:

Khi nhân chia các số phức ta vẫn có thể để dưới dạng đại số và sử dụng cụng thức $j^2 = -1$. Cho 2 số phức $s_1 = a_1 + jb_1$ và $s_2 = a_2 + jb_2$. Ta có

$$
\begin{aligned}
s_1.s_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)
\end{aligned}
$$

Khi ta nhân n số phức giống nhau

$$
\begin{aligned}
s &= a + jb \\
&= \varepsilon\angle\varphi \\
&= \varepsilon(\cos\varphi + j\sin\varphi)
\end{aligned}
$$

ta được kết quả:

$$
\begin{aligned}
s^n &= (a + jb)^n \\
&= \varepsilon^n\angle(n\varphi) \\
&= \varepsilon^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)
\end{aligned}
$$

Đặc biệt khi $\varepsilon = 1$, ta có

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + j\sin n\varphi) \qquad (1.8)$$

Công thức trên được gọi là công thức Moivre.

1.2.3. Khai căn số phức

Xét số phức

$$
\begin{aligned}
s &= a + bj \\
&= \varepsilon\angle\varphi \qquad . \\
&= \varepsilon(\cos\varphi + j\sin\varphi)
\end{aligned}
$$

Căn bậc *n* của *s* là:

$$\sqrt[n]{s} = \sqrt[n]{\varepsilon}\left[cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right] \qquad (1.9)$$

với *k* nguyờn, $n \in N$.

<u>Chứng minh:</u>

Giả sử ta có

$$\sqrt[n]{s} = s_1$$
$$= a_1 + jb_1$$
$$= \varepsilon_1 \angle \varphi_1$$

Suy ra,

$$s_1^n = s.$$

hay

$$\varepsilon_1^n \angle n\varphi_1 = \varepsilon_1^n (\cos n\varphi_1 + j\sin n\varphi_1)$$
$$= \varepsilon(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1^n \\ n\varphi_1 = \varphi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \sqrt[n]{\varepsilon} \\ \varphi_1 = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Trong công thức trên ta thấy: nếu cho k với 2 giá trị hơn kém nhau n, chẳng hạn k và $k+n$ thì ta có cùng một số phức bởi vì:

$$cos\frac{\varphi + 2(k+n)\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2(k+n)\pi}{n}$$
$$= cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2\pi\right) + j\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2\pi\right)$$
$$= cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Vì vậy trong biểu thức tính $\sqrt[n]{z}$ ta chỉ cần lấy k là các số nguyên liên tiếp: $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ là đủ. Với n giá trị của k ta có n số phức khác nhau: $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$. Chúng đều là căn bậc n của z.

$$z_0 = \sqrt[n]{\varepsilon}(cos\frac{\varphi}{n} + j\sin\frac{\varphi}{n})$$

$$= \sqrt[n]{\varepsilon}.e^{j\varphi/n}$$

$$z_1 = \sqrt[n]{\varepsilon}(cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+2\pi}{n})$$

$$= \sqrt[n]{\varepsilon}.e^{j\frac{\varphi+2\pi}{n}}$$

.

.

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{\varepsilon}(cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n})$$

$$= \sqrt[n]{\varepsilon}.e^{j\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}}$$

Từ đó ta có:

$$z_1 = \varepsilon_1.e^{j\frac{\varphi+2\pi}{n}}$$

$$= \varepsilon_1 e^{j\frac{\varphi}{n}}.e^{j\frac{2\pi}{n}}$$

$$= z_0.e^{j\frac{2\pi}{n}}$$

$$z_2 = \varepsilon_1.e^{j\frac{\varphi+4\pi}{n}}$$

$$= \varepsilon_1 e^{j\frac{\varphi+2\pi}{n}}.e^{j\frac{2\pi}{n}}$$

$$= z_1.e^{j\frac{2\pi}{n}}$$

Nghĩa là z_1 được suy ra từ z_0 bởi phép quay quanh gốc tọa độ O một góc $\dfrac{2\pi}{n}$. Tương tự z_2 được suy ra từ z_1 bởi phép quay quanh gốc tọa độ O một góc $\dfrac{2\pi}{n}$. Vậy tọa độ của z_k $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ là một đỉnh của một đa giác đều n cạnh tâm có tâm tại O.

Ví dụ 1.8

Tính $\sqrt[4]{-1}$.

Ta có $-1 = 1(\cos\pi + j\sin\pi)$

- Khi $k = 0$:

$$z_0 = \sqrt[4]{1}(cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4})$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Khi $k = 1$:

$$z_1 = \sqrt[4]{1}(cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4})$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Khi $k = 2$:

$$z_2 = \sqrt[4]{1}(cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4})$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Khi $k = 3$:

$$z_3 = \sqrt[4]{1}(cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4})$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luyện tập

Tính

1) $\sqrt[4]{j}$

2) $\sqrt[3]{1+j}$

3) $\sqrt[4]{1}$

4) $\sqrt{1+j}$

1.3 Hàm biến phức

1.3.1. Định nghĩa

Cho C là tập hợp các số phức. Nếu với mỗi số phức $z = a + jb \in C$ cho tương ứng với một số phức $s = \alpha + j\beta$ theo một quy luật nào đó, thì ta nói rằng ta đã tạo ra quan hệ hàm số và s là một hàm số biến phức của z. Kí hiệu hàm số đó là $s = f(z)$. C được gọi là miền xác định của hàm số.

Hàm số $s = f(z)$ được gọi là hàm số đơn trị nếu:

$$z_1, z_2 \in C, z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

Hàm số $s = f(z)$ được gọi là hàm số đa trị nếu với mỗi số phức $z \in C$ ta có nhiều giá trị s.

Ví dụ 1.9

a) Hàm số $s = \frac{1}{z}$ xác định trên toàn bộ mặt phẳng phức trừ điểm cú phần thực $\mathrm{Re}(z) = 0$ (Re(z) là phần thực của số phức).

b) Hàm số $s = \frac{z}{z^2 + 1}$ xác định trên toàn mặt phẳng phức, trừ 2 điểm $z = \pm j$.

c) Hàm số $s = z + \sqrt{z+1}$ xác định trên toàn mặt phẳng phức nhưng đây là một hàm đa trị.

Thật vậy, xét điểm $z = 0 \Rightarrow s = \sqrt{1}$. Vì

$$1 = cos 0^0 + j \sin 0^0$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} s_1 &= cos 0^0 + j \sin 0^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} s_2 &= cos \frac{2\pi}{2} + j \sin \frac{2\pi}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Vậy tại $z = 0$, s có 2 giá trị 1 và -1. Do đó s là hàm đa trị.

1.3.2. Phần thực và phần ảo của một hàm phức

Cho hàm biến phức $s = f(z)$, có nghĩa là cho phần thực thực α và phần ảo β của s. Ở đây α và β chính là các hàm phụ thuộc z. Nếu $z = a + jb$ với a và b là các số thực, khi đó α và β là hai hàm số thực của 2 biến thực độc lập a và b:

$$\alpha = \alpha(a,b) \text{ và } \beta = \beta(a,b)$$

Tóm lại, khi cho trước một hàm $s = f(z)$ với $z = a + jb$ tương đương với việc cho $\alpha = \alpha(a,b)$ và $\beta = \beta(a,b)$. Do đó

$$s = \alpha(a,b) + j\beta(a,b) \qquad (1.10)$$

Ngược lại khi cho trước một hàm số $s = f(z)$ ta sẽ tách được phần thực và phần ảo theo biểu thức như (1.10).

Ví dụ 1.10

Tách phần thực và phần ảo của hàm $s = z^3$, biết $z=a+bj$.

$$\begin{aligned} s &= (a+jb)^3 \\ &= a^3 + 3a^2jb + 3a(jb)^2 + (jb)^3 \\ &= a^3 + j3a^2b - 3ab^2 - jb^3 \\ &= a(a^2-3b^2) + jb(3a^2-b^2) \end{aligned}$$

Vậy $\alpha = a(a^2-3b^2)$ và $\beta = b(3a^2-b^2)$.

Bài tập

1) Tách phần thực phần ảo của $s = \dfrac{1}{z}$, biết $z=a+bj$.
2) Cho $s = a^2 - b^2 + 2jab$ và $z=a+bj$. Hãy biểu diễn s theo z và z^*
3) Tính $(1+\cos\alpha + j\sin\alpha)^n$

Đáp số:

$$2^n \cos^n \frac{\alpha}{2}(\cos\frac{n\alpha}{2} + j\sin\frac{n\alpha}{2})$$

4) Biết rằng

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta\,.$$

Chứng minh rằng:

$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$$

CHƯƠNG 2 PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

2.1 Phương pháp của phép tính toán tử

Cho 2 tập hợp A và B. Một ánh xạ T_x cho ứng với mỗi phần tử x của tập hợp A một phần tử xác định của tập hợp B, ký hiệu T_x được gọi là một toán tử.

- x: được gọi là gốc
- T_x: được gọi là ảnh

Ví dụ 2.1

1) Nếu $x \in R$ và $T_x \in R$ thì toán tử T_x là hàm thực của biến thực x.
2) Nếu $x \in R^+$ thì $T_x = \ln x$ được gọi là toán tử loga.

Giả thiết ta phải nghiên cứu các đối tượng thuộc tập hợp A và trong nó tồn tại các phép tính. Giả sử ta có một tập hợp B, quan hệ giữa các phần tử thuộc tập hợp A với tập hợp B là quan hệ $1:1$ (quan hệ song ánh). Đồng thời các phép toán trong tập hợp A tương ứng với các phép toán trong tập B nhưng các phép toán trong tập B đơn giản hơn. Vì vậy ta sẽ khảo sát các phép toán trong tập B. Và khi ta cú được kết sẽ quay trở lại tập hợp A. Phương pháp nghiên cứu như vậy được gọi là phương pháp toán tử.

Các phép tính toán tử được đưa về 2 bài toán cơ bản sau:

- Bài toán thuận: Biết phần tử trong tập gốc tìm phần tử tương ứng trong tập ảnh.
- Bài toán ngược: Biết phần tử trong tập ảnh tìm phần tử tương ứng trong tập gốc.

2.2 Phép biến đổi Laplace

Phộp biến đổi Laplace được phỏt minh ra lần đầu tiờn bởi nhà toỏn học người Pháp Pierre Simon Laplace. Năm 1799 nó được ứng dụng để giải các phương trỡnh vi phõn.

2.2.1. Định nghĩa

Hàm biến phức $F(s)$ được xác định bằng biểu thức tích phân sau đây:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (2.1)$$

được gọi là biến đổi Laplace của hàm gốc *f(t)*, trong đó tích phân trên được hiểu là tích phân suy rộng trong giải tích số thực và $s = \alpha + j\omega$ được gọi là biến số phức.

2.2.2. Điều kiện tồn tại tích phân Laplace

Hàm $f(t)$ của biến thực là hàm gốc nếu nó thoả mãn các điều kiện sau đây:

a) Hàm $f(t)$ liên tục từng khúc khi $t \geq 0$.

b) Khi $t \to \infty$, hàm $f(t)$ tăng không nhanh hơn một hàm mũ, nghĩa là tồn tại các số $M > 0$ và $s_0 > 0$, sao cho:

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \ \forall t > 0$$

trong đó s_0 được gọi là chỉ số tăng của gốc *f(t)*.

c) $f(t) = 0$ khi $t < 0$. Do ý nghĩa vật lý t thường là biến thời gian.

Hàm $f(t)$ thoả mãn 3 điều kiện trên được gọi là hàm gốc. Hàm $F(s)$ được gọi là hàm ảnh (hoặc ảnh). Hầu hết các hàm được sử dụng trong kỹ thuật đều là hàm gốc.

Ví dụ 2.2

a) Hàm bước nhẩy

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

là một hàm gốc.

Thật vậy $u(t)$ liên tục trong khoảng $[0,+\infty)$. Vì $|u(t)| \leq 1.e^{0t}, M = 1, s_0 = 0$ và $u(t) = 0, \forall t < 0$. Hàm $u(t)$ cũn được gọi là hàm đơn vị.

b) Hàm $f(t) = u(t).\sin t$ là hàm gốc.

Ta thấy $u(t).\sin t$ liên tục trong khoảng $[0;+\infty)$. $|u(t)\sin t| \leq 1.e^{0t}, M = 1, s_0 = 0$ và $u(t)\sin t = 0, \forall t < 0$.

c) Hàm $f(t) = u(t).t^2$ là hàm gốc.

Thậy vậy $u(t).t^2$ liên tục trong khoảng $[0;+\infty)$. Vì

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots \geq \frac{t^2}{2!}$$

ta có:

$$|u(t)t^2| \leq 2.e^t, M = 2, s_0 = 1$$

và

$$u(t)t^2 = 0, \forall t < 0.$$

Chú ý:

Để đơn giản đối với hàm $u(t)f(t)$ người ta thường viết $f(t)$, trừ trường hợp biểu thức kết quả cuối cùng. Nếu hàm $f(t)$ có ảnh là $F(s)$ thì: $L\{f(t)\} = F(s)$.

2.2.3. Tính chất của ảnh

Nếu $f(t)$ là một hàm gốc có chỉ số tăng s_0 thì tích phân

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ với } s = \alpha + j\omega$$

sẽ hội tụ trong miền $\mathrm{Re}(s) \geq s_0$.

<u>Chứng minh:</u>

1) Vì $\left|f(t)\right| \leq Me^{s_0 t} \Rightarrow \left|f(t).e^{-st}\right| \leq Me^{s_0 t}e^{-st} = Me^{(s_0 - s)t}$.

Vì $s_0 - s < 0$, do đó $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{(s_0 - s)t} = 0$. Vậy

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt \leq \frac{M}{s_0 - s},$$

cho nên tích phân trên hội tụ trong miền $\mathrm{Re}(s) \geq s_0$.

2) $F(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s) \geq s_0$.

Giả sử G là một miền mở. Nếu hàm $w = f(z)$ có đạo hàm $f'(z)$ tại các điểm thuộc G thì $f(z)$ được gọi là giải tích trong G.

Đạo hàm $F(s)$ theo biến s dưới dấu tích phân ta có:

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} -te^{-st} f(t)dt$$

Do đó

$$\int_0^{+\infty} \left|-te^{-st} f(t)\right| dt \le M \int_0^{+\infty} te^{(s_0-s)t} dt$$

Để tính $\int_0^{+\infty} te^{(s_0-s)t} dt$ ta dùng phương pháp tích phân từng phần. Đặt

$$u = t \Rightarrow du = dt,$$

$$dv = e^{(s_0-s)t} dt \quad \Rightarrow v = \frac{1}{s_0 - s} e^{(s_0-s)t}$$

Suy ra,

$$\int_0^{+\infty} te^{(s_0-s)t} dt = \frac{t}{s_0 - s} e^{(s_0-s)t} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{(s_0-s)t}}{s_0 - s} dt$$

$$= 0 - \frac{1}{(s_0 - s)^2} e^{(s_0-s)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(s_0 - s)^2}$$

Vậy

$$\int_0^{+\infty} \left|-te^{-st} f(t)\right| dt \le \frac{M}{(s_0 - s)^2}$$

Theo định lý Weierstrass thì tích phân trên hội tụ đều đối khi $\operatorname{Re}(s) > s_0$ và $F(s)$ giải tích khi $s > s_0$.

Ví dụ 2.3

Tìm ảnh qua phép biến đổi Laplace của cọc hàm sau:

1) Hàm bước nhẩy đơn vị *u(t)*.

$$L\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} .$$

$$= \frac{1}{s}$$

Với $\mathrm{Re}(s) \geq s_0$, thì khi $t \to +\infty$, $e^{-st} \to 0$ và khi $t \to 0$, $e^{-st} \to 1$.

2) $L\{e^{at}\}$, trong đó a là một hằng số.

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt$$

$$= \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

Vì khi $t \to +\infty$, $e^{(a-s)t} \to 0$ và khi $t \to 0$, $e^{(a-s)t} \to 1$ với $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$. Vậy

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} .$$

<u>Chú ý</u>:

Sau này ta chỉ quan tâm tới sự tồn tại của ảnh trong một miền hội tụ nào đó, mà không quan tõm tới bản thân miền đó, nên bên cạnh công thức cho ảnh của một hàm gốc ta không cần viết miền hội tụ ảnh Laplace của nó.

2.3 Các tính chất của phép biến đổi Laplace

2.3.1. Tính chất tuyến tính

Giả sử $f(t)$ và $g(t)$ là hai hàm gốc, a và b là hai hằng số thực (hoặc phức).

Nếu

$$F(s) = L\{f(t)\} \text{ và } G(s) = L\{g(t)\}$$

thì

$$L\{a.f(t) + b.g(t)\} = a.F(s) + b.G(s) \qquad (2.2)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} L\{\mathrm{af}(t) + bg(t)\} &= \int_0^{+\infty} [\mathrm{af}(t) + bg(t)]e^{-st}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{af}(t)e^{-st}dt + \int_0^{+\infty} bg(t)e^{-st}dt \\ &= a\int_0^{+\infty} \mathrm{f}(t)e^{-st}dt + b\int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt \\ &= a\mathrm{F}(s) + bG(s) \end{aligned}$$

Ví dụ 2.4

1) Tìm ảnh của $f(t) = \sin \omega t$.

Theo công thức Euler ta có:

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \\ &= \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$L\{\mathrm{e}^{\omega t}\} = \frac{1}{s-\omega}$$

Do đó

$$L\{e^{j\omega t}\}=\frac{1}{s-j\omega} \text{ và } L\{e^{-j\omega t}\}=\frac{1}{s+j\omega}.$$

Vậy

$$L\{\sin\omega t\}=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)$$
$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

2) Tìm ảnh của $f(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$

Ta có:

$$f(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$$
$$=a\sin\omega t\cos\varphi+a\cos\omega t\sin\varphi$$
$$L\{f(t)\}=L\{a\sin\omega t\cos\varphi+a\cos\omega t\sin\varphi\}$$
$$=a\cos\varphi\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+a\sin\varphi\frac{s}{s^2+\omega^2}$$
$$=\frac{a(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi)}{s^2+\omega^2}$$

Với u(t) = 220 sin (314t + $\frac{\pi}{3}$), ta cú

$$L\{u(t)\}=\frac{220}{s^2+314^2}\left(314\cos\frac{\pi}{3}+s\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

<u>Bài tập</u>

Chứng minh ảnh của các hàm số sau là đúng:

a) $L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$

b) $L\{\cos(\omega t+\varphi)\}=\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$

c) $L\{\sin^3 t\} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right)$

2.3.2 Tính chất đồng dạng

Giả sử λ là một hằng số dương bất kỳ. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì

$$L\{f(\lambda t)\} = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \qquad (2.3)$$

<u>Chứng minh:</u>

Theo định nghĩa ta có:

$$L\{f(\lambda t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(\lambda t)\,dt$$

Đặt $t_1 = \lambda t$. Ta có $t = \frac{t_1}{\lambda}$ và $dt = \frac{dt_1}{\lambda}$. Khi $t = +\infty \Rightarrow t_1 = +\infty$ và khi $t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$.

Do đó:

$$L\{f(\lambda t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{t_1}{\lambda}} f(t_1)\frac{dt_1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{\lambda}t_1} f(t_1)\,dt_1$$

$$= \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

2.3.3. Tính chất chuyển dịch ảnh

Cho a là một hằng số bất kỳ. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \qquad (2.4)$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa ta có:

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\}=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

$$=F(s-a)$$

Ví dụ 2.5

Giả sử $L\{f(t)\}=F(s)$. Tìm ảnh của $f(t)\sin\omega t$.

Theo công thức Euler ta có:

$$f(t)\sin\omega t=f(t)\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

Theo tớnh chất dịch chuyển ảnh thì:

$$L\{f(t)e^{j\omega t}\}=F(s-j\omega)$$

và

$$L\{f(t)e^{-j\omega t}\}=F(s+j\omega)$$

Mặt khác theo tính chất tuyến tính ta có:

$$L\{f(t)\sin\omega t\}=\frac{1}{2j}\left[F\left(s-j\omega\right)-F(s+j\omega)\right]$$

Bài tập

Chứng minh

$$L\{f(t)\cos\omega t\}=\frac{1}{2}\left[F(s-j\omega)+(s+j\omega)\right].$$

2.3.4. Tính chất trễ

Cho τ là một hằng số dương. Nếu $L\{f(t)\}=F(s)$ thì

$$L\{f(t-\tau)u(t-\tau)\}=e^{-s\tau}F(s)\qquad(2.5)$$

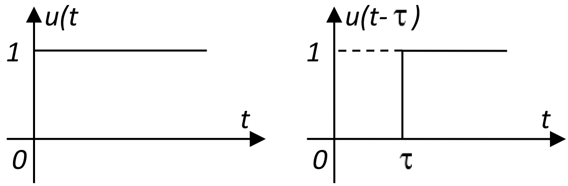
<u>Chứng minh:</u>

Ta có

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

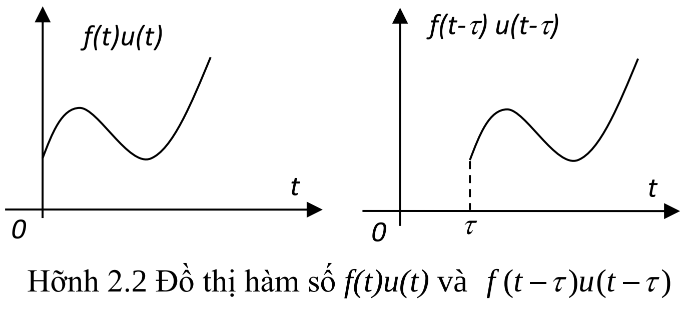
Do đó

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0, t < \tau \\ 1, t \geq \tau \end{cases}$$



Hỡnh 2.1 Đồ thị hàm số u(t) và $u(t-\tau)$

Đồ thị của hàm $f(t-\tau)u(t-\tau)$ được suy ra từ từ đồ thị của hàm $f(\tau)u(t)$ bằng cách tịnh tiến theo trục hoành sang phải một đoạn τ .



Hỡnh 2.2 Đồ thị hàm số *f(t)u(t)* và $f(t-\tau)u(t-\tau)$

Nếu t và τ là những đại lượng thời gian thì quá trình biểu diễn bởi hàm $f(t-\tau)u(t-\tau)$ xảy ra giống như quá trình biểu diễn bởi hàm $f(t)u(t)$ nhưng chậm hơn một khoảng là τ .

Theo định nghĩa ta có

$$L\{f(t-\tau)u(t-\tau)\} = \int_0^{+\infty} f(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$= \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt$$

Đặt $t_1 = t-\tau \Rightarrow dt = dt_1$. Khi $t=\tau \Rightarrow t_1 = 0$ và khi $t = +\infty \Rightarrow t_1 = +\infty$.

Do đó

$$L\{f(t-\tau)u(t-\tau)\} = \int_0^{+\infty} f(t_1)e^{-s(t_1+\tau)}dt_1$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t_1)e^{-st_1}e^{-s\tau}dt_1$$

$$= e^{-s\tau}\int_0^{+\infty} f(t_1)e^{-st_1}dt_1$$

$$= e^{-s\tau}F(s)$$

.

Chú ý:

Phân biệt hàm $u(t)f(t-\tau)$ và hàm $f(t-\tau)u(t-\tau)$.

Ví dụ 2.6

Hàm $f(t) = e^{2t}$ có ảnh $F(s) = \dfrac{1}{s-2}$. Nhưng hàm

$$f(t-1) = e^{2(t-1)}$$

$$= e^{-2}e^{2t}$$

có ảnh là

$$\frac{e^{-2}}{s-2}.$$

Còn hàm

$$f(t-1)u(t-1) = e^{2(t-1)}u(t-1)$$

có ảnh là

$$\frac{e^{-s}}{s-2}.$$

2.3.5. Biểu diễn hàm xung qua hàm u(t)

Hàm xung là hàm có dạng

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < a \\ c, a \le t \le b \\ 0, t > b \end{cases}$$

Có thể được biểu diễn dưới dạng

$$f(t) = [u(t-b) - u(t-a)]c$$

Sau khi biểu diễn như vậy, ta áp dụng các tính chất của phép biến đổi Laplace để tìm ảnh $F(s)$. Ta cú:

$$F(s) = c\frac{e^{-bs} - e^{-as}}{s} \qquad (2.6)$$

Ví dụ 2.7

Tìm ảnh của hàm f(t) được mô tả như sau:

$$f(t) = \begin{cases} 0, khi \quad t < a \\ 110, khi \quad a \le t \le b \\ 0, khi \quad t > b \end{cases}$$

Theo công thức (2.6) ta có:

$$L\{f(t)\} = 110.\frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{s}$$

2.3.6. Ảnh của một hàm tuần hoàn

Nếu *f(t)* là một hàm gốc và tuần hoàn với chu kỳ T

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t > 0,$$

thì

$$F(s) = \frac{\Phi(s)}{1-e^{-sT}} \qquad (2.7)$$

trong đó

$$\Phi(s) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

là ảnh của hàm

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, khi \quad t < 0 \\ f(t), khi \quad 0 \le t \le T \\ 0, khi \quad t > T \end{cases}$$

<u>Chứng minh:</u>

Theo định nghĩa ta có:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Đổi *u=t-T*, ta có khi *t = T* thì *u = 0,* khi *t = +∞ thì u = +∞* và *dt = du*.

Như vậy,

$$I = \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u+T)e^{-s(u+T)}du$$

$$= e^{-sT}\int_0^{+\infty} e^{-su} f(u+T)du$$

Do tính chất tuần hoàn của hàm số ta có *f(u) = f(u +T)*. Cho nên

$$I = e^{-sT}\int_0^{+\infty} e^{-su}.f(u)du$$

$$= e^{-sT}.F(s)$$

Do vậy,

$$F(s) = \int_o^T f(t)e^{-st}dt + e^{-sT}F(s)$$

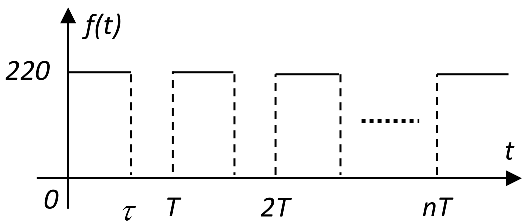
$$= \Phi(s) + e^{-sT}F(s)$$

Suy ra,

$$F(s) = \frac{\Phi(s)}{1-e^{-sT}}$$

Vớ dụ 2.8

Tìm ảnh Laplace của hàm tuần hoàn *f(t)* được biểu diễn như hình vẽ:



Trong đó:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, khi \quad t < 0 \\ 220, khi \quad 0 \le t \le \tau \\ 0, khi \quad t > \tau \end{cases}$$

Áp dụng công thức tính ta có

$$\Phi(s) = \int_0^T f(t).e^{-st}dt$$

$$= 220\int_0^\tau e^{-st}dt$$

$$= \left.\frac{220.e^{-st}}{-s}\right|_0^\tau$$

$$= \frac{220.(1-e^{-s\tau})}{s}$$

Vậy

$$F(s) = \frac{220.(1-e^{-s\tau})}{s(1-e^{-sT})}$$

2.3.7 Đạo hàm và tích phân gốc

2.3.7.1. Đạo hàm gốc

Giả sử *f(t)* là hàm gốc và có đạo hàm là $f'(t)$ cũng là một hàm gốc.

Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$

thì

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \qquad (2.8)$$

<u>Chứng minh:</u>

Theo định nghĩa ta có:

$$L\{f^{'}(t)\} = \int_{0}^{+\infty} f^{'}(t)e^{-st}dt$$

Để tính được tích phân trên ta dùng phương pháp tích phân từng phần. Đặt

$$u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}dt$$

và

$$dv = f^{'}(t)dt \Rightarrow v = f(t).$$

Ta có

$$\begin{aligned} L\{f^{'}(t)\} &= e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty} + s\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty} + sF(s) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Vì *f(t)* là một hàm gốc nên

$$|f(t)| \le Me^{\delta_0 t} \Rightarrow \left|e^{-st}f(t)\right| \le \left|e^{-st}.Me^{\delta_0 t}\right|$$

Nếu *Re(s)* > δ_0 thì $\left|e^{-st}Me^{\delta_0 t}\right| = \left|Me^{(\delta_0 - s)t}\right| = 0$ khi *t* tiến tới $+\infty$. Vậy

$$e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty} = -f(0).$$

Thay vào công thức (2.9) ta có:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

Đạo hàm cấp cao

Nếu *f(t)* có đạo hàm tới cấp *n* và các đạo hàm này là những hàm gốc thì khi áp dụng tính đạo hàm gốc ta có:

$$\begin{aligned} L\{f^{''}(t)\} &= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f^{'}(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f^{'}(0) \end{aligned}$$

$$L\{f'''(t)\} = s\left[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right] - f''(0)$$
$$= s^3F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Tổng quát, ta có ảnh Laplace của đạo hàm cấp n của hàm số $f(t)$:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{n-1}(0)$$

Ví dụ 2.9

Cho $y = x''' - 10x'' + 12x'$, $x(t) = \sin 314t$, với các điều kiện đầu là: $x(0) = 0; x'(0) = 10$ và $x''(0) = -15$.

Hãy tìm *Y(s)*.

Ta có:

$$X(s) = L\{x(t)\}$$
$$= \frac{314}{s^2 + 314^2}$$
$$L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0)$$
$$= sX(s)$$
$$L\{x''(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$
$$= s^2X(s) - 10$$
$$L\{x'''(t)\} = s^3X(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0)$$
$$= s^3X(s) - 10s + 15$$

Ta cú:

$$Y(s) = s^3X(s) - 10s + 15 - 10[s^2X(s) - 10] + 12sX(s)$$
$$= X(s)[s^3 - 10s^2 + 12s] - 10s + 115$$
$$= \frac{314}{s^2 + 314^2}[s^3 - 10s^2 + 12s] - 10s + 115$$

Hệ quả:

Nếu *f(t)* là hàm gốc và giải tích tại $+\infty$ thì:

1. $\lim\limits_{s\to+\infty} sF(s) = \lim\limits_{t\to+0} f(t) = f(0)$

2. $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$

Hệ quả (2) thường được dùng đánh giá sai lệch tĩnh của một hệ thống điều khiển tự động.

2.4.7.2. Tích phân gốc

Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì $\int_0^t f(t)dt$ là một hàm gốc và

$$L\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (2.10)$$

Chứng minh:

1. Đặt $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$. Chứng minh *φ(t)* là hàm gốc. Ta có

φ(0) = 0, hàm *φ(t)* có đạo hàm là *f(t)* liên tục từng khúc.

$$\varphi(t) \le \int_0^t |f(t)|dt \le \int_0^t Me^{\delta_0 t}dt$$

$$\int_0^t Me^{\delta_0 t}dt = \frac{M}{\delta_0} e^{-s_0 t}\Big|_0^t$$

$$= M_1 e^{\delta_0 t}\Big|_0^t$$

$$= M_1 e^{s_0 t}$$

Vậy *φ(t)* là một hàm gốc có cùng chỉ số tăng δ_0 với *f(t)*.

2. Giả sử $L\{\varphi(t)\} = \Phi(s)$.

Ta có

$$F(s) = L\{f(t)\}$$
$$= L\{\varphi^{'}(t)\}$$

$$L\{f(t)\} = L\{\varphi'(t)\}$$
$$= s\Phi(s) - \varphi(0)$$
$$= s\Phi(s)$$

Suy ra

$$F(s) = s\Phi(s)$$
$$\Rightarrow \Phi(s) = \frac{F(s)}{s}$$

hay

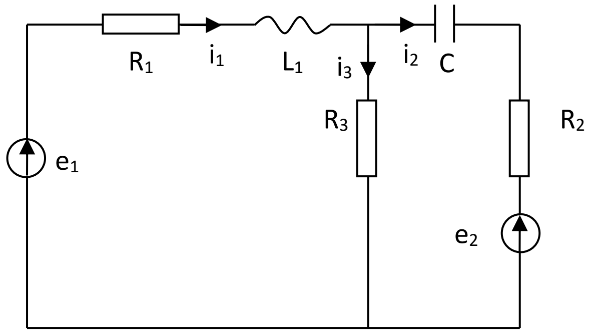
$$L\{\varphi(t)\} = \frac{F(s)}{s}.$$

<u>Chú ý:</u>

Nhờ phép biến đổi Laplace mà các phép tính đạo hàm và tích phân đối với hàm gốc được chuyển thành các phép tính đại số của ảnh tương ứng. Do vậy phép biến đổi Laplace có nhiều ứng dụng trong việc giải phương trình vi phân.

Ví dụ 2.10:

Cho mạch điện như hình vẽ. Tìm i_1, i_2, và i_3 biết R_1, R_2, R_3, L_1, C_2, $e_1 = 220\sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$, $e_2 = 220\sin 100\pi t$ và $i_1(0) = i_2(0) = 0$.



Từ sơ đồ mạch, áp dụng các định luật dòng và áp ta có hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1R_1 + L_1i_1' + R_3i_3 = 220\sin(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}) \\ i_2R_2 + \dfrac{1}{C_2}\int i_2dt - i_3R_3 = -220\sin 100\pi t \end{cases}$$

<u>Nhận xét:</u>

Nếu giải trực tiếp hệ phương trình vi phân đối miền với gốc là tương đối khó khăn nhưng nếu chuyển sang miền ảnh Laplace thì được hệ phương trình đại số có thể đơn giản hơn rất nhiều. Biến đổi Laplace cả hai vế của hệ phương trình ở trên với các điều kiện đầu bằng khụng được:

$$\begin{cases} I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0 \\ I_1(s)\left[R_1 + L_1 s\right] + R_3 I_3(s) = \dfrac{220}{s^2 + 314^2}\left(\dfrac{314}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}s\right) \\ I_2(s)\left[R_2 + \dfrac{1}{sC_2}\right] - I_3(s).R_3 = \dfrac{220.314}{s^2 + 314^2} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $I_1(s)$, $I_2(s)$ và $I_3(s)$. Biến đổi Laplace ngược sẽ thu được $i_1(t)$, $i_2(t)$ và $i_3(t)$.

2.4.8 Đạo hàm và tích phân ảnh

2.4.8.1. Đạo hàm ảnh

Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì

$$L\{t.f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds} \qquad (2.11)$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa ta có

$$L\{-tf(t)\} = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st}dt$$

Ta lại có

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} -tf(t).e^{-st}dt$$

Suy ra

$$L\{t.f(t)\} = -F'(s).$$

Áp dụng tính chất đạo hàm ảnh liên tiếp ta có

$$L\{(-t)^2.f(t)\} = F''(s)$$

$$L\{(-t)^n.f(t)\} = F^{(n)}(s)$$

Ví dụ 2.11

Tìm $L\{t.u(t)\}$

Ta có $L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, suy ra

$$L\{-t.u(t)\} = (\frac{1}{s})' = -\frac{1}{s^2}.$$

Vậy $L\{t.u(t)\} = \frac{1}{s^2}$.

Tương tự ta có

$$L\{t^2.u(t)\} = \frac{2!}{s^3}$$

Công thức tổng quát sẽ là

$$L\{t^n.u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

2.4.8.2 Tích phân ảnh

Giả sử hàm *f(t)* có ảnh là *F(s)*. Nếu $\int_s^{+\infty} F(s)ds$ tồn tại thì nó là ảnh của hàm $\frac{f(t)}{t}$, nghĩa là

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(s)ds \qquad (2.12)$$

<u>Chứng minh:</u>

$$\int_s^{+\infty} F(s)ds = \int_s^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\right]ds$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\left[\int_s^{+\infty} e^{-st}ds\right]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\frac{e^{-st}}{t}dt$$

$$= L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

Ví dụ 2.12

Tìm ảnh của hàm $f(t) = \dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t}$ với a và b là hai hằng số bất kỳ.

$$L\{f(t)\} = L\left\{\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}\right\}$$

$$= L\left\{\frac{e^{bt}}{t}\right\} - L\left\{\frac{e^{at}}{t}\right\}$$

Ta có $L\{e^{bt}\} = \dfrac{1}{s-b}$ và $L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$.

$$L\{f(t)\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{s-b}ds - \int_s^{+\infty} \frac{1}{s-a}ds$$

$$= (\ln|s-b| - \ln|s-a|)\Big|_s^{+\infty}$$

$$= \ln\frac{s-a}{s-b}$$

2.5 Ảnh của tính chập

2.5.1. Định nghĩa tính chập của hai hàm số

Cho hai hàm số *f(t)* và *g(t)*. Tích phân

$$\int_o^t f(\tau).g(t-\tau)d\tau \qquad (2.13)$$

là một hàm của t và được gọi là tích chập của hai hàm số *f(t)* và *g(t)* hoặc phép nhân chập. Kí hiệu là

$$f*g=\int_o^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

2.5.2. Tính chất

2.5.2.1. Tính giao hoán

$$f*g=g*f \qquad (2.14)$$

<u>Chứng minh:</u>

Ta có $f*g=\int_o^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Đặt $\tau_1=t-\tau \Rightarrow \tau=t_1-\tau_1$ và $d\tau_1=-d\tau$. Khi $\tau=0$ thì $\tau_1=t$ và khi $\tau=t$ thì $\tau_1=0$.

Vậy

$$f*g=-\int_t^0 f(t-\tau_1)g(\tau_1)d\tau_1$$

$$=\int_0^t g(\tau_1)f(t-\tau_1)d\tau_1$$

$$=g*f$$

Ví dụ 2.13

1. Tính $\cos t*t$.

$$\cos t * t = \int_0^t (t-\tau) cos\tau d\tau$$

$$= \int_0^t (t-\tau) d(\sin\tau)$$

$$= (t-\tau).\sin\tau \Big|_0^t + \int_0^t \sin\tau d\tau$$

$$= -cos\tau \Big|_0^t$$

$$= -\cos t + 1$$

2. Tính $\sin * t$

$$\sin * t = \int_0^t (t-\tau)\sin\tau d\tau$$

$$= \int_0^t (t-\tau) d(-cos\tau)$$

$$= -(t-\tau)cos\tau \Big|_0^t - \int_0^t cos\tau d\tau$$

$$= t - \sin\tau \Big|_0^t$$

$$= t - \sin t$$

2.5.2.2. Ảnh của tích chập

Nếu *f(t)* và *g(t)* là những hàm gốc thì tích chập $f * g$ cũng là hàm gốc. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ và $L\{g(t)\} = G(s)$ thì

$$L\{f * g\} = F(s).G(s) \qquad (2.15)$$

Ví dụ 2.14

Tính ảnh

a)

$$L\{e^t * t\} = \frac{1}{s^2}.\frac{1}{s-1}$$
$$= \frac{1}{s^2(s-1)}$$

b)

$$L\{\sin t * t\} = \frac{1}{s^2+1}.\frac{1}{s^2}$$
$$= \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

2.5.2.3. Cặp công thức Duhamen

Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ và $L\{g(t)\} = G(s)$ thì

$$L^{-1}\{sF(s).G(s)\} = f(0).g(t) + f' * g \qquad (2.16)$$

$$L^{-1}\{sF(s).G(s)\} = g(0).f(t) + g' * f \qquad (2.17)$$

<u>Chứng minh:</u>

Ta có $sF(s).G(s) = f(0)G(s) + \left[sF(s) - f(0)\right]G(s)$

mà

$$L\{f(0).g(t)\} = f(0).G(s)$$

và

$$L\{f'(t) * g(t)\} = \left[sF(s) - f(0)\right].G(s)$$

Do vậy

$$sF(s).G(s) = L\{f(0).g(t) + f' * g\}$$

Do tính chất đối xứng nên từ (2.16) ta có (2.17).

2.6 Biến đổi laplace ngược

2.6.1. Quan hệ giữa gốc và ảnh

Nếu *f(t)* là một hàm gốc có chỉ số tăng s_0 và *L{f(t)}* = *F(s)* thì tại mọi điểm liên tục của f(t), ta có:

$$f(t)u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{st}.F(s)ds \qquad (2.18)$$

trong đó, *a* là một số thực bất kỳ $a > s_0$. Vế phải của biểu thức (2.18) là một tích phân đường với tham số *t*, biến *s*, lấy dọc theo đường thẳng song song với trục ảo từ $a - j\infty$ đến $a + j\infty$.

2.6.2 Phương pháp tìm hàm gốc *f(t)*

Về nguyên tắc, khi đã biết ảnh muốn tìm lại hàm gốc f(t) ta có thể sử dụng công thức (2.18). Nhưng việc tính tích phân gặp rất nhiều khó khăn nên trong thực tế ta thường dùng các phương pháp sau:

- Tra bảng.
- Khai triển phõn thức.

Giả sử ảnh Laplace có dạng

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_o}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_o} \qquad (2.19)$$

trong đó $m < n$, $F_1(s) = 0$ và $F_2(s) = 0$ không có nghiệm chung.

Ta phân tích *F(s)* thành tổng của các phân thức tối giản mà hàm gốc có dạng là những hàm mũ đã biết. Ta xét các trường hợp sau:

a. Trường hợp $F_2(s)=0$ chỉ có nghiệm thực đơn $s_1, s_2, ..., s_n$. **N**hư vậy ta có thể phân tích *F(s)* thành dạng sau:

$$F(s)=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+...+\frac{A_k}{s-s_k}+...+\frac{A_n}{s-s_n}$$

Hay

$$F(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-s_k} \qquad (2.20)$$

Trong đó A_k là các hằng số phải tìm. Để tìm A_k ta nhân hai vế của phương trình (2.20) với $(s-s_k)$ và thay $s=s_k$, ta có $A_k=(s-s_k)F(s)\big|_{s=s_k}$.

Như vậy ta có hàm gốc

$$f(t)=u(t)\sum_{k=1}^{n}A_k.e^{s_k t}$$

Ví dụ 2.15

1. Cho $I(s)=\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$ với $a \neq b$. Hãy tìm gốc i(t).

Ta có các điểm cực là $s_1=-a$ và $s_1=-b$. Các hệ số tương ứng là:

$$A_1=(s+a)F(s)\big|_{s=-a}$$

$$=\frac{1}{b-a}$$

và

$$A_2 = (s+b)F(s)\big|_{s=-b}$$
$$= \frac{1}{a-b}$$

Vậy hàm gốc là

$$i(t) = \left[\frac{1}{b-a}e^{-at} + \frac{1}{a-b}e^{-bt}\right]u(t)$$
$$= \left[\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})\right]u(t)$$

2. Cho $F(s) = \dfrac{3s}{(s+2)(s-3)}$. Hãy tìm *f(t)*.

Các điểm cực là $s_1 = -2; s_2 = 3$.

$$A_1 = (s+2)F(s)\big|_{s=-2}$$
$$= \frac{3s}{s-3}\bigg|_{s=-2}$$
$$= \frac{6}{5}$$

và

$$A_2 = (s-3)F(s)\big|_{s=3}$$
$$= \frac{3s}{s+2}$$
$$= \frac{9}{5}$$

Do đó hàm gốc *f(t)* phải tìm là

$$f(t) = \left(\frac{6}{5}e^{-2t} + \frac{9}{5}e^{3t}\right)u(t)$$

b. Trường hợp $F_2(s)=0$ có nghiệm bội

Giả sử $F(s)$ có *r* điểm cực lặp tại $s=p$. Khi đó ta có thể biểu diễn $F(s)$ dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \\ &= \frac{A_1}{s-p} + \frac{A_2}{(s-p)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-p)^r} + R(s) \end{aligned} \tag{2.21}$$

trong đó $R(s)$ là phần còn lại của $F(s)$ và R(s) không có điểm cực tại *p*.

Để tìm các hằng số A_r ta nhân cả hai vế của phương trình (2.21) với $(s-p)^r$ và thay $s=p$. Do đó ta có vế bên phải là A_r do các số hạng khác đều bằng không.

$$A_r = (s-p)^r F(s)|_{s=p}$$

Để tìm A_{r-1}, ta nhân cả hai vế của phương trình (2.21) với $(s-p)^r$ và lấy đạo hàm hai vế rồi thay $s=p$ ta có:

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p)^r F(s)\right]|_{s=p}$$

Làm tương tự như trên ta có:

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p)^r F(s)\right]\Big|_{s=p}$$

Hệ số thứ *i* là

$$A_{r-i} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}\left[(s-p)^r F(s)\right]\Big|_{s=p} \tag{2.22}$$

trong đó *i = 1, 2, ..., r-1*.

Khi đã tìm được các hệ số A_1, A_2, ..., A_r, chúng ta sử dụng công thức biến đổi Laplace ngược

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+a)^i}\} = \frac{t^{i-1}e^{-at}}{(i-1)!}u(t)$$

cho mỗi phần tử bên phải của phương trình (2.21) thu được:

$$f(t) = \left[A_1 + \frac{A_2 t}{1!} + \frac{A_3 t^2}{2!} + \ldots + \frac{A_r t^{r-1}}{(r-1)!} \right] e^{pt} u(t) + r(t) \quad (2.23)$$

Ví dụ 2.16

1. Tìm gốc của dòng điện toán tử $I(s) = \dfrac{s+2}{s(s+3)^2}$

Ta thấy $s(s+3)^2 = 0$ có một nghiệm $s_1 = 0$ (nghiệm đơn) một nghiệm $s_2 = -3$ (nghiệm bội). Theo công thức tổng quát có:

$$i(t) = [A_0 + (A_1 + A_2 t)e^{-3t}]u(t)$$

Với

$$A_0 = I(s)s\Big|_{s_1=0} = \frac{2}{9}$$

$$A_2 = \left[I(s)(s+3)^2 \right]_{s_2=-3}$$

$$= \left[\frac{s+2}{s} \right]_{s_2=-3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$A_1 = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+2}{s}\right]_{s_2=-3}$$

$$= -\frac{2}{s^2}\Big|_{s_2=-3}$$

$$= -\frac{2}{9}$$

Vậy

$$i(t) = [\frac{2}{9} + (-\frac{2}{9} + \frac{1}{3}t)e^{-3t}]u(t)$$

2. Cho $F(s) = \dfrac{16s^2 + 25s + 1}{(s+1)(s+2)^3}$. Tìm *f(t)*.

Ta có $(s+1)(s+2)^3 = 0$ có một nghiệm $s_1 = -1$ (nghiệm đơn) và một nghiệm $s_2 = -2$ (nghiệm bội 3)

Theo công thức tổng quát ta có:

$$f(t) = [A_0 e^{-t} + (A_1 + A_2 t + \frac{A_3}{2!}t^2)e^{-2t}]u(t)$$

Với

$$A_0 = F(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = -8$$

$$A_3 = F(s)(s+2)^3\Big|_{s_2=-2}$$

$$= \frac{16s^2 + 25s + 1}{(s+1)}\Big|_{s_2=-2}$$

$$= -15$$

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left[\frac{16s^2+25s+1}{(s+1)}\right]\Bigg|_{s_2=-2}$$

$$= \left[\frac{(32s+25)(s+1)-(16s^2+25s+1)}{(s+1)^2}\right]\Bigg|_{s_2=-2}$$

$$= -54$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{16s^2+25s+1}{s+1}\right]\Bigg|_{s_2=-2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{16s^2+32s+24}{(s+1)^2}\right]\Bigg|_{s_2=-2}$$

$$= 8$$

Vậy

$$f(t) = [-8e^{-t} + (8 - 54t - \frac{15t^2}{2})e^{-2t}]u(t)$$

c. Trong trường hợp $F_2(s) = 0$ có cặp nghiệm phức liên hợp

Trong trường hợp này ta có thể tìm hàm gốc giống như trường hợp $F_2(s)$ có nghiệm đơn. Tuy nhiên ta có thể tìm bằng cách đơn giản hơn như sau:

Giả sử s_k và s_k^* là một cặp nghiệm phức liên hợp của $F_2(s) = 0$. Khi đó $F_1(s_k^*)$ và $F_2^{'}(s_k^*)$ sẽ lần lượt là số phức liên hợp của $F_1(s_k)$ và $F_2^{'}(s_k)$. Do đó:

$$\frac{F_1(s_k^*)}{F_2^{'}(s_k^*)} = \frac{F_1^*(s_k)}{(F_2^{'})^*(s_k)}$$

Đặt

$$\begin{cases} s_k = \beta + j\alpha \\ s_k^* = \beta - j\alpha \end{cases}$$

Giả sử $\dfrac{F_1(s_k)}{F_2^{'}(s_k)} = A_k e^{j\alpha_0}$, suy ra $\dfrac{F_1(s_k^*)}{F_2^{'}(s_k^*)} = A_k e^{-j\alpha_0}$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{F_1(s_k)}{F_2^{'}(s_k)} e^{(\beta + j\alpha)t} + \frac{F_1(s_k^*)}{F_2^{'}(s_k^*)} e^{(\beta - j\alpha)t} \\ &= A_k e^{j\alpha_0} e^{(\beta + j\alpha)t} + A_k e^{-j\alpha_0} e^{(\beta - j\alpha)t} \\ &= A_k e^{\beta t}[e^{j(\alpha t + \alpha_0)} + e^{-j(\alpha t + \alpha_0)}] \\ &= 2A_k e^{\beta t} cos(\alpha t + \alpha_0) \end{aligned}$$

<u>Tóm lại:</u>

Sau khi có $s_k = \beta \pm j\alpha$ ta tính $\dfrac{F_1(s_k)}{F_2^{'}(s_k)} = A_k e^{j\alpha_0}$, ta sẽ tìm ngay được kết quả là :

$$f(t) = 2A_k e^{\beta t} cos(\alpha t + \alpha_0) u(t) \qquad (2.24)$$

Như vậy khối lượng tính toán sẽ giảm đi nhiều.

2.7 Giải phương trõnh vi phõn hệ số hằng

2.7.1. Phương pháp

Xét phương trình vi phân

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \qquad (2.25)$$

Tìm nghiệm của phương trình vi phân *(2.25)* với các điều kiện đầu:

$$x(0) = x_0; x'(0) = x_1; ...; x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \text{ và } a_0 \neq 0$$

Giả thiết hàm *f(t)*, nghiệm *x(t)* cùng với các đạo hàm của nó đều là những hàm gốc. Để tìm nghiệm của phương trình *(2.25)* ta tiến hành như sau:

Giả sử $L\{x(t)\} = X(s)$ và $L\{f(t)\} = F(s)$. Theo công thức đạo hàm gốc ta có:

$$\begin{aligned} L\{x'(t)\} &= sX(s) - x(0) \\ &= sX(s) - x_0 \\ L\{x''(t)\} &= s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) \\ &= s^2 X(s) - sx_0 - x_1 \\ &... \\ L\{x^n(t)\} &= s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - ... - x_{n-1}. \end{aligned}$$

Biến đổi Laplace hai vế của phương trình (1) ta được:

$$\begin{aligned} F(s) = {} & (a_0 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n)X(s) \\ & -(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + ... + a_{n-1})x_0 \\ & -(a_0 s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + ... + a_{n-2})x_1 \\ & -... - a_0 x_{n-1}. \end{aligned}$$

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n)X(s)$$
$$= F(s) + a_0s^{n-1} + a_1s^{n-2} + ... + a_{n-1} - x_0 + ... + a_0x_{n-1}$$

Đặt

$$A(s) = (a_0s^n + a_1s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n)$$
$$B(s) = a_0s^{n-1} + a_1s^{n-2} + ... + a_{n-1} - x_0 + ... + a_0x_{n-1}$$

Ta có $A(s).X(s) = F(s) + B(s)$. Suy ra

$$X(s) = \frac{F(s) + B(s)}{A(s)} \qquad (2.26)$$

trong đó: *A(s)* và *B(s)* là những đa thức đã biết. Sau khi tìm được ảnh *X(s)* ta dùng phép biến đổi Laplace ngược sẽ tìm được hàm gốc *x(t)*.

2.7.2 Một số vớ dụ ứng dụng

Vớ dụ 2.17

Tìm nghiệm của phương trình vi phân.

$$x'' - x = 4\sin t + 5cos2t$$

với $x(0) = -1; x'(0) = -2$.

Giả sử $L\{x(t)\} = X(s)$, ta có

$$L\{x''(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$
$$= s^2X(s) + s + 2$$

hay

$$s^2X(s) + s + 2 - X(s) = 4\frac{1}{s^2+1} + 5\frac{s}{s^2+4}$$
$$X(s)(s^2-1) = \frac{4}{s^2+1} + \frac{5s}{s^2+4} - (s+2)$$

Do đó

$$X(s)=\frac{4}{(s^2-1)(s^2+1)}+\frac{5s}{(s^2-1)(s^2+4)}-\frac{s+2}{s^2-1}$$

$$=\frac{2}{s^2-1}-\frac{2}{s^2+1}+\frac{s}{s^2-1}-\frac{s}{s^2+4}-\frac{2}{s^2-1}-\frac{s}{s^2-1}$$

$$=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$$

Vậy hàm gốc cũng như nghiệm của phương trõnh là:

$$x(t)=\left[-2\sin t-\cos 2t\right]u(t)$$

Vớ dụ 2.18

Tìm nghiệm của phương trình.

$$x''+4x'+4x=t^3e^{-2t}$$

với $x(0)=1; x'(0)=2$.

Đặt $X(s)=L\{x(t)\}$, ta có:

$$L\{x'(t)\}=sX(s)-x(0)$$

$$=sX(s)-1$$

$$L\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)$$

$$=s^2X(s)-s-2$$

Mặt khác:

$$L\{t^3e^{-2t}\}=\frac{3!}{(s+2)^{3+1}}$$

$$=\frac{6}{(s+2)^4}$$

Do đó:

$$s^2X(s) - s - 2 + 4sX(s) - 4 + 4X(s) = \frac{6}{(s+2)^4}$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) + 4sX(s) + 4X(s) - s - 6 = \frac{6}{(s+2)^4}$$

$$\Leftrightarrow X(s)(s^2 + 4s + 4) - (s+6) = \frac{6}{(s+2)^4}$$

$$X(s) = \frac{6}{(s+2)^6} + \frac{6+s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{6}{(s+2)^6} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}$$

Vậy nghiệm *x(t)* của phương trình là:

$$x(t) = \left(\frac{6}{5!}t^5e^{-2t} + 4te^{-2t} + e^{-2t}\right)u(t)$$

2.8 Phộp biến đổi Fourier

2.8.1. Định nghĩa

Giả sử *f(t)* là một hàm số với biến số thực *t*, triệt tiêu với mọi *t<0*, và khả tích tuyệt đối trong khoảng $[0;+\infty]$ nghĩa là tồn tại tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$. Ta gọi ảnh Fourier của *f(t)* là một hàm biến thực, ký hiệu là *F(jω)* và được định nghĩa bằng công thức.

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (2.29)$$

So với phép biến đổi Laplace (2.1)

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (s = \delta + j\omega)$$

ta thấy phép biến đổi *Fourier* là một trường hợp riêng của phép biến đổi Laplace với $\delta = 0$. Với phép biến đổi Laplace ứng với một gốc *f(t)* ta cú ảnh *F(s)* xác định và giải tích trên mặt phẳng $s = \delta + j\omega$ trừ một số điểm cực ở đó $F(s) = \infty$.

Bằng phép biến đổi Fourier ta cú ảnh *F(jω)* xác định và giải tích trên trục ảo *jω*, trừ điểm có $F(j\omega) = \infty$.

Coi $F(j\omega)$ là ảnh Laplace trên trục ảo. Ảnh đó sẽ không có điểm cực trên $j\omega$ nếu gốc có số mũ tăng âm $\delta_0 < 0$. Do đó gốc có độ lớn tắt dần theo *t* vì:

$$|u(t)f(t)| < Me^{-at},\ \delta_0 > a > 0$$

mà $\int_{0}^{\infty} Me^{-at}dt$ hội tụ do đó $\int_{0}^{\infty} |f(t)|dt$ hội tụ, cho nờn *u(t)f(t)* khả tích tuyệt đối.

Ngược lại, nếu gốc không thoả mãn điều kiện khả tích ấy, ảnh Fourier có thể có điểm cực trên $j\omega$.

2.8.2 Phép biến đổi Furiê ngược

Giả sử biết trước ảnh Fourier của một hàm gốc *f(t),* hàm gốc được tính như sau:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Ví dụ 2.19

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{s}\Big|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{1}{j\omega}$$

$$F\{\sin t.u(t)\} = \frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{1}{1-\omega^2}$$

$$F\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s-a}\Big|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{1}{j\omega - a}$$

$$F\{cos\omega_0 t.u(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\Big|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

CHƯƠNG 3 PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Gần đây các hệ thống thu thập, xử lý và truyền số liệu; các hệ thống công nghiệp sử dụng các mạch vi xử lý, các hệ thống lớn sử dụng máy vi tính và máy tính mini đã trở nên phổ biến. Các quá trình và hệ thống điều khiển có máy tính số có bộ điều khiển số, có thiết bị biến đổi xung đều thuộc lớp hệ thống xung - có khi còn được gọi là hệ thống rời rạc hoặc hệ thống gián đoạn. (Discrete- Time System).

Trong hệ thống tuyến tính liên tục- phép biến đổi Laplace giữ vai trò quan trọng thì trong hệ xung số (hệ rời rạc) - phép biến đổi z cũng có chức năng tương tự.

3.1. Định nghĩa

Cho hàm số *f(nT)* xác định trên tập các số nguyên *n* trong đó *T* là hằng số (*T* được gọi là thời gian lấy mẫu). Biến đổi **z** của hàm *f(nT)* là *F(z)*:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)e^{-nsT} \qquad (3.1)$$

Công thức (3.1) là phép biến đổi **z** hai phía. Trong lĩnh vực kỹ thuật ta chỉ xét phép biến đổi **z** một phía

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)e^{nsT} \qquad (3.2)$$

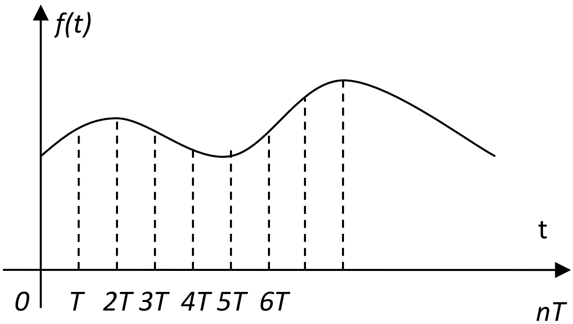
Giả sử ta có hàm liên tục *f(t)* bất kỳ. Để chuyển hàm này từ dạng liên tục sang hàm rời rạc *f(nT)*. Theo giải tích ta có thể viết:

$$f(nT) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(t)\delta(t - nT) \qquad (3.3)$$

Trong đó:

$$\delta(t - nT) = \begin{cases} 1, t = nT \\ 0, t \neq nT \end{cases}$$

Việc biến đổi từ tín hiệu liên tục thành rời rạc ta gọi là quá trình cắt mẫu (Sampling). Ví dụ trên hình vẽ ta có tín hiệu liên tục *f(t)* và tương ứng có tín hiệu rời rạc *f(nT)*. Thông thường khoảng thời gian cắt mẫu: *T* = hằng số.



Hỡnh 3.1 Quỏ trỡnh cắt mẫu

Như vậy hàm *f(nT)* chính là hàm rời rạc của hàm *f(t)*. Gọi biến đổi Laplace của hàm *f(nT)* - kí hiệu là $F^*(s)$

$$F^*(s) = L\{f(nT\}$$

$$= \int_0^{+\infty} f(nT)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(t)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)e^{-nsT} \qquad (3.4)$$

Đặt $z = e^{-sT}$ với z cú dạng $z = \alpha + j\omega$. Ta cú:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n} \qquad (3.5)$$

Đây chính là phép biến đổi z của hàm số *f(nT).*

Ví dụ 3.1

1. Cho hàm *f(nT) = u(nT)*. Tìm *F(z)*

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u(nT)z^{-n} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots \\ &= \lim_{n\to+\infty}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - z^{-(n+1)}}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Kết quả này có được là do $|z|<1$.

2. Cho hàm $f(nT) = e^{-anT}$. Tìm *F(z)*

$$\begin{aligned}F(z) &= Z\left\{f(nT)\right\}\\ &= Z\left\{e^{-anT}\right\}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-anT}.z^{-n}\\ &= 1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\dots\\ &= \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\end{aligned}$$

Ở vớ dụ này ta đặt $z_0 = e^{aT}z$. Khi đó *F(z)* cú dạng như vớ dụ trờn.

Để thuận tiện cho quỏ trỡnh tỡm hàm gốc và ảnh z, chỳng ta cú thể dựng bảng tra như sau.

Bảng 3.1 Ảnh z của một số hàm cơ bản

STT	*Hàm f(n)*	*Ảnh F(z)*
1	$\delta(n)$	1
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
3	e^{-an}	$\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}$
4	$e^{-anT}\sin bnT$	$\frac{(e^{-aT}\sin bT)z}{z^2-(2e^{-aT}\cos bT)z+e^{-2aT}}$
5	$e^{-anT}\cos bnT$	$\frac{z^2-(e^{-aT}\cos bT)z}{z^2-(2e^{-aT}\cos bT)z+e^{-2aT}}$
6	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

trong đó: a là hằng số, $\delta(n)$ là hàm xung đơn vị và *u(n)* là hàm bước nhẩy đơn vị và *n* là số nguyờn khụng õm. Khi *a=0* (4) và (5) trở thành hàm sin và cos.

3.2 Cỏc tớnh chất của phộp biến đổi z

3.2.1. Tính chất tuyến tính

Nếu $Z\left\{f_1(n)\right\}=F_1(z)$ và $Z\left\{f_2(n)\right\}=F_2(z)$ thỡ

$$Z\left\{af_1(n)+bf_2(n)\right\}=aF_1(z)+bF_2(z) \qquad (3.6)$$

trong đó *a và b* là các hằng số thực hoặc phức.

3.2.2. Tính chất dịch hàm gốc

Giả sử $Z\left\{f(n)\right\}=F(z)$ ta cú:

$$Z\left\{f(n+m)\right\}=z^m F(z)-\sum_{j=0}^{m-1} f(j)z^{m-j} \qquad (3.7)$$

trong đó *m* là một số nguyờn.

<u>Chứng minh:</u>

Đặt $n_1=n+m$. Nếu $n=0 \Rightarrow n_1=m$. Do đó, khi $n\to+\infty$ thỡ $n_1\to+\infty$. Ta cú:

$$Z\left\{f(n+m)\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty} f(n+m)z^{-n}$$

$$=z^m\sum_{n=0}^{+\infty} f(n+m)z^{-(n+m)}$$

$$=z^m\sum_{m}^{+\infty} f(n_1)z^{-n_1}$$

$$=z^m\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty} f(n_1)z^{-n_1}-\sum_{n_1=0}^{m-1} f(n_1)z^{-n_1}\right]$$

$$=z^mF(z)-z^m\sum_{j=0}^{m-1} f(j)z^{-j}.$$

Vậy

$$Z\left\{f(n+m)\right\}=z^mF(z)-\sum_{j=0}^{m-1} f(j)z^{m-j}$$

Nếu cọc điều kiện đầu bằng *0* ta có kết quả sau:

$$Z\left\{f(n+1)\right\}=zF(z)$$

$$Z\left\{f(n+2)\right\}=z^2F(z)$$

...

$$Z\left\{f(n+m)\right\}=z^mF(z)$$

3.2.3. Giá trị đầu của hàm gốc

Nếu

$$F(z)=Z\left\{f(n)\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n}$$

Ta cú:

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots + \frac{f(n)}{z^n} + \ldots$$

Vậy

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z) \qquad (3.8)$$

Ví dụ 3.2

Tìm giá trị đầu của hàm *f(n)* khi biết biến đổi *z* của nó có dạng sau:

1. $F(z) = \dfrac{z}{z-3}$

Ta cú:

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z-3}$$

$$= 1$$

2. $F(z) = \dfrac{1}{(1-a.z^{-1})(1-bz^{-1})}$

Ta cú:

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{1}{(1-a.z^{-1})(1-b.z^{-1})}$$

$$= 1$$

3.2.4. Giá trị cuối của hàm gốc

Nếu $F(z) = Z\{f(n)\}$ thì

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)F(z) \qquad (3.9)$$

Chứng minh:

Ta có:

$$Z\left\{ f(n+1)-f(n)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[f(n+1)-f(n)\right] z^{-n}$$
$$= zF(z) - f(0) - F(z)$$

Khi *z→1* ta cú:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[f(n+1)-f(n)\right] = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}\left[f(n+1)-f(n)\right]$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\left[f(m+1)-f(0)\right]$$

vậy

$$\lim_{z\to1}\left[(z-1)F(z)\right] - f(0) = \lim_{m\to+\infty}\left[f(m+1)-f(0)\right]$$

Do đó:

$$f(\infty) = \lim_{z\to1}[(z-1)F(z)]$$

Ví dụ 3.3

Cho $F(z) = \dfrac{1}{(1-a.z^{-1})(1-z^{-1})}$. Tỡm $f(\infty)$.

$$f(\infty) = \lim_{z\to1}(z-1)F(z)$$
$$= \lim_{z\to1}(z-1)\frac{1}{(1-a.z^{-1})(1-z^{-1})}$$
$$= \lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{(1-a.z^{-1})(z-1)}$$
$$= \frac{1}{1-a}$$

3.3 Biến đổi *Z* ngược

Thông thường khi chúng ta có ảnh *F(z)* của một hàm nào đó, tức là chúng ta có biểu diễn của hàm *f(n)* trong miền z. Sau khi khảo sát gián tiếp hàm số *f(n)* trong miền *z* ta cần phải đưa nó trở về miền biến số độc lập tự nhiên, tức là ta phải tìm *f(n)* từ ảnh *F(z)* của nó. Biến đổi *z* ngược sẽ giúp ta thực hiện công việc này.

Hiện nay có các phương pháp: phương pháp giỏ trị thặng dư, phương pháp khai triển thành phân thức tối giản và phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa. Ở đây chúng ta chỉ xét các phương pháp được ứng dụng nhiều trong kỹ thuật.

3.3.1. Phương pháp triển khai thành phân thức tối giản

Trong thực tế ta thường sử dụng các biến đổi *z* và ta biểu diễn biến đổi *z* dưới dạng sau đây $F(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$.

Phương pháp này chính là việc tiến hành khai triển biến đổi *z* thành các phân thức tối giản. Sau đó tìm biến đối *z* ngược của các phân thức này. Kết quả cuối cùng là tổng các biến đổi *z* ngược của các phân thức tối giản này.

Giả sử:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$= \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m}$$

trong đó: *N(z)* là đa thức bậc *n*, *D(z)* là đa thức bậc *m*.

Nếu $n \geq m$ ta tiến hành chia đa thức *N(z)* cho *D (z)*.
Ta có:

$$F(z) = S(z) + \frac{P(z)}{D(z)}$$

trong đó: *S(z)* là đa thức bậc *n-m* có dạng sau

$$S(z) = s_{n-m}z^{n-m} + s_{n-m-1}z^{n-m-1} + ... + s_1 z + s_0$$

Nếu *n< m* thì *S(z) = 0* và $F(z) = \frac{P(z)}{D(z)}$, ta sẽ tiến hành khai triển $\frac{P(z)}{D(z)}$ thành các phân thức tối giản.

Trường hợp 1: *F(z)* chỉ có các điểm cực đơn, nghĩa là *D(z)=0* có các nghiệm đơn. Ta viết *F(z)* dưới dạng sau:

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(z - z_k)}$$

trong đó z_k là điểm cực đơn của *F(z)*, tức là z_k là nghiệm đơn của *D(z)=0*. Ta cú

$$A_k = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{P(z)}{D(z)}$$

$$= (z - z_k) \frac{P(z)}{D(z)} \bigg|_{z = z_k}$$

Trường hợp 2: *F(z)* có điểm cực bội
Giả sử *D(z)=0* ngoài *k* nghiệm đơn còn có một nghiệm bội z_l bậc *r.* Ta khai triển *F(z)* dưới dạng sau:

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{(z - p_k)} + \sum_{j=1}^{r} \frac{B_j}{(z - z_l)^j}$$

trong đó:

- z_l : điểm cực bội

- p_k : điểm cực đơn

Khi đó A_k và B_j được tính như sau:

$$A_k = (z - p_k)\frac{P(z)}{D(z)}\bigg|_{z=p_k}$$

$$B_j = \frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}}\left[(z-z_l)^r\frac{P(z)}{D(z)}\right]\bigg|_{z=z_l}$$

Sau khi khai triển *F(z)* xong ta sẽ tìm hàm ngược *z* của từng phân thức một rồi tổng hợp kết quả ta có *f(n)*.

Hàm ngược *z* của các phân thức sẽ được tìm bởi các công thức sau:

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-z_k}\right\} = (z_k)^n.u(n)$$

Ví dụ 3.4

1. Cho $F(z) = \dfrac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}$

Hãy tìm *f(n)* bằng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Giải:

Trước hết ta tìm tất cả các điểm cực của *F(z)*.

$$F(z) = \frac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}$$

$$= \frac{z+2}{2(z-\frac{1}{2})(z-3)}$$

Vậy $F(z)$ có 2 điểm cực đơn là: $z_1 = \frac{1}{2}$ và $z_2 = 3$. Ta cú

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{z - z_k}$$

Với A_k được tính như sau:

$$A_1 = (z - z_1)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z_1=\frac{1}{2}}$$

$$= (z - \frac{1}{2})\frac{z+2}{2(z-\frac{1}{2})(z-3)z}\Bigg|_{z_1=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{z+2}{2(z-3)z}\bigg|_{z_1=\frac{1}{2}}$$

$$= -1$$

$$A_2 = (z - z_2)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z_2=3}$$

$$= (z-3)\frac{z+2}{2(z-\frac{1}{2})(z-3)z}\Bigg|_{z_2=3}$$

$$= \frac{z+2}{2(z-\frac{1}{2})z}\Bigg|_{z_2=3}$$

$$= 1/3$$

Vậy

$$F(z) = -\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-3}$$

Ta có kết quả:

$$f(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n h(n) + 3^n.h(n)$$

2. Cho $F(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$ hãy tìm *f(n)*?

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$Q(z) = 2z^{-2} - 3z^{-1} + 1$$

$$= 2(z^{-1}-1)(z^{-1}-\frac{1}{2})$$

Vậy *F(z)* có 2 điểm cực đơn là $z_1^{-1} = 1$ và $z_2^{-1} = \frac{1}{2}$

Các hệ số A_k được tính như sau:

$$A_1 = (z^{-1}-1)\frac{1}{2(z^{-1}-1)(z^{-1}-\frac{1}{2})}\Bigg|_{z_1^{-1}=1}$$

$$=1$$

$$A_2 = (z^{-1}-\frac{1}{2})\frac{1}{2(z^{-1}-1)(z^{-1}-\frac{1}{2})}\Bigg|_{z_2^{-1}=\frac{1}{2}}$$

$$=-1$$

Vậy

$$F(z) = \frac{1}{(z^{-1}-1)} - \frac{1}{(z^{-1}-\frac{1}{2})}$$

$$= -\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{2}{1-2z^{-1}}$$

$$= -\frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-2}$$

Ta có kết quả:

$$f(n) = -u(n) + 2.2^n.u(n)$$

3. Cho $F(z) = \dfrac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-1)^2}$

Hãy tìm *f(n)* bằng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

<u>Giải:</u>

Ta thấy *F(z)* có 1 điểm cực đơn là $p_1 = \dfrac{1}{2}$ và một điểm cực bội bậc 2 là $z_2 = 1$. Vì $n < m$ ta có:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{1} \frac{A_k}{(z-p_k)} + \sum_{j=1}^{2} \frac{B_j}{(z-z_l)^j}$$

$$= \frac{A_1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B_1}{(z-1)} + \frac{B_2}{(z-1)^2}$$

$$A_1 = (z-\frac{1}{2})\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-1)^2}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

$$B_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{-1/2}{(z-\frac{1}{2})^2}\Bigg|_{z=1}$$

$$= -2$$

$$B_2 = \left[(z-1)^2 \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{z}{(z-\frac{1}{2})}\Bigg|_{z=1}$$

$$= 2$$

Ta có:

$$F(z) = \frac{2}{(z-\frac{1}{2})} - \frac{2}{(z+1)} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

$$= F_1(z) - F_2(z) + F_3(z)$$

Với

$$Z^{-1}\left[F_1(z)\right] = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.u(n-1)$$

và

$$Z^{-1}\left[F_2(z)\right] = 2.u(n-1)$$

Ta niết rằng

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z-1}\right] = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

mà

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] = h(n-1)$$

$$Z\left\{h(n-1)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n-1)z^{-n}$$

$$= \frac{1}{z-1}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} h(n-1)z^{-n}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n-1).(-n).z^{-n-1}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^2}$$

Đổi biến *m=n+1*, suy ra *n=m-1*.

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m-1).h(m-2)z^{-m}$$

Vậy kết quả cuối cùng là:

$$f(n) = 2\frac{1}{2^{n-1}}.u(n-1) - 2.u(n-1) + 2(n-1).u(n-2)$$

3.3.2. Phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa

Ta biết rằng trong miền hội tụ của *F(z)* thì *F(z)* là một hàm giải tích của *z*. Ta có thể khai triển *F(z)* thành chuỗi luỹ thừa có dạng:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^{-n}$$

Mặt khác theo định nghĩa ta có:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) z^{-n}$$

Cả hai chuỗi này đều hội tụ trong miền hội tụ của F(z). Vậy đồng nhất các hệ số của hai chuỗi này ta có:

$$f(n) = \alpha_n$$

Tức là các hệ số của z^{-n} chính là các giá trị của *f(n)*.

Ví dụ 3.5

1. Cho $F(z) = \dfrac{z}{z+2}$. Hãy tìm *f(n)*.

Giải:

Ta có:

$$F(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$= \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

Ta tiến hành chia tử số của *F(z)* cho mẫu số của nó ta sẽ có chuỗi luỹ thừa theo z^{-1}.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+2z^{-1} \\ \cline{2-2}
\underline{1+2z^{-1}} & 1-2z^{-1}+4z^{-2}-8z^{-3}+\ldots \\
-2z^{-1} & \\
\underline{-2z^{-1}-4z^{-2}} & \\
\quad 4z^{-2} & \\
\quad \underline{4z^{-2}+8z^{-3}} & \\
\quad\quad -8z^{-3} & \\
\quad\quad \underline{-8z^{-3}-16z^{-4}} & \\
\quad\quad\quad 16z^{-4} & \\
\quad\quad\quad \ldots &
\end{array}
$$

Vậy một cỏch tổng quát ta có.

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{-n}$$

Ta thu được *f(n)* như sau.

$$f(n) = (-2)^n.u(n)$$

2. Cho $F(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-1,414z^{-1}+z^{-2}}$. Tìm *f(n)*?

<u>Giải:</u>

Ta tiến hành chia tử số của *F(z)* cho mẫu của nó thì ta sẽ có chuỗi luỹ thừa theo z^{-1}.

$$
\begin{array}{l|l}
z^{-1} & 1-1,414z^{-1}+z^{-2} \\
\cline{2-2}
\underline{z^{-1}-1,414z^{-2}+z^{-3}} & z^{-1}+1,414z^{-2}+z^{-3}-z^{-5}-1,414z^{-6}... \\
\quad 1,414z^{-2}-z^{-3} & \\
\quad \underline{1,414z^{-2}-2z^{-3}+1,414z^{-4}} & \\
\qquad z^{-3}-1,414z^{-4} & \\
\qquad \underline{z^{-3}-1,414z^{-4}+z^{-5}} & \\
\qquad\quad -z^{-5} & \\
\qquad\quad \underline{-z^{-5}+1,414z^{-6}-z^{-7}} & \\
\qquad\qquad -1,414z^{-6}+z^{-7} &
\end{array}
$$

Suy ra:

$$F(z)=z^{-1}+\sqrt{2}z^{-2}+z^{-3}+0z^{-4}-z^{-5}-\sqrt{2}z^{-6}...$$

Vậy

$$f(n)=\sin(\frac{2\pi}{8}n).h(n)$$

<u>Chú ý:</u>

- Ta cần khai triển thành chuỗi luỹ thừa theo z^{-1} hoặc z.
- Phương pháp chia đa thức có ưu điểm là dễ dàng tự động hoá hoàn toàn bằng máy tính, tuy nhiên có nhược điểm là: nếu tính thủ công sẽ lâu và khó khăn.

Bài tập

1. Cho $F(z)=\dfrac{z^{3}}{z^{-1}}$. Hãy tìm *f(n)* bằng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

2. Cho $F(z)=\dfrac{4z^2+8z}{4z^2-5z+1}$. Tìm *f(n)* bằng phương pháp khai triển thành phương pháp tối giản.

3. Cho $F(z)=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}z^{-1}+z^{-2}}$. Tìm *f(n)* bằng phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa.

3.4 Ứng dụng giải phương trõnh vi phõn hệ số hằng

Cũng giống như phép biến đổi Laplace ta có thể sử dụng phép biến đổi *z* để giải phương trình sai phân hệ số hằng.

Ví dụ 3.6

Giải phương trình sai phân sau.

$$2.f(n-2) - 3.f(n-1) + f(n) = 3^{n-2}$$

với các điều kiện đầu: $f(-1)=-\dfrac{1}{3};\ f(-2)=-\dfrac{4}{9}$

Giải:

Để giải phương trình trên ta lấy biến đổi *z* hai vế phương trình:

$$Z\left\{f(n-1)\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}f(n-1).z^{-n}$$

$$=f(-1)+f(0).z^{-1}+f(1)z^{-2}+\ldots+f(n)z^{-(n+1)}+\ldots$$

$$=f(-1)+z^{-1}\left[f(0)+f(1)z^{-1}+\ldots+f(n)z^{-n}+\ldots\right]$$

$$=f(-1)+z^{-1}F(z)$$

(Hoặc dựng tớnh chất dịch hàm gốc, ta cú thể thu được kết quả tương tự)

Tương tự có:

$$Z\left\{f(n-2)\right\}=f(-2)+z^{-1}.f(-1)+z^{-2}.F(z)$$

Ta cú:

$$2\left[z^{-2}.F(z)+z^{-1}f(-1)+f(-2)\right]-3\left[z^{-1}.F(z)+f(-1)\right]+F(z)$$

$$=3^{-2}\frac{1}{z(z-3)}$$

Thay các điều kiện đầu đầu vào ta được:

$$2\left[z^{-2}.F(z)-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{4}{9}\right]-3\left[z^{-1}.F(z)-\frac{1}{3}\right]+F(z)=\frac{1}{9}.\frac{z}{z-3}$$

$$F(z)\left[2.z^{-2}-3z^{-1}+1\right]=\frac{1}{9}.\frac{z}{z-3}+\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{8}{9}-1$$

$$F(z)\frac{(z-1)(z-2)}{z^2}=\frac{2}{3z}+\frac{1}{9}.\frac{z}{z-3}-\frac{1}{9}$$

$$=\frac{6(z-3)+z^2-z(z-3)}{9z(z-3)}$$

$$=\frac{z-2}{z(z-3)}$$

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

Để tìm *f(n)* ta phải tìm $Z^{-1}\{F(z)\}$. Ta cú thể dùng phương pháp khai triển phương trình tối giản.

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z-3}$$

$$A_1=-\frac{1}{2};A_2=\frac{1}{2}$$

$$F(z)=-\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-3}$$

Kết quả là:

$$f(n)=-\frac{1}{2}.u(n)+\frac{1}{2}.3^n.u(n)$$

$$=\frac{1}{2}(3^n-1).u(n)$$

Vớ dụ 3.7

Tìm nghiệm của phương trình:

f(n+2) - 5f(n+1)+6f(n) = 0

thoả mãn các điều kiện đầu: *f(0) = 0; f(1) = 1*.

Giải:

Tìm nghiệm của bài toán tức là tìm hàm *f(n)* với *n = 1, 2, 3, ...*

Giả sử $Z\{f(n)\} = F(z)$. Theo tính chất dịch hàm gốc ta có:

$$Z\{f(n+1)\} = z.F(z) - zf(0)$$
$$= z.F(z)$$
$$Z\{f(n+2)\} = z^2.F(z) - z^2 f(0) - f(1).z$$
$$= z^2.F(z) - z$$

Biến đổi z hai vế của phương trình ta cú:

$$z^2F(z) - z - 5.z.F(z) + 6.f(z) = 0$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}$$
$$= \frac{z}{(z-2)(z-3)}$$
$$= \frac{-2}{z-2} + \frac{3}{z-3}$$

Kết quả là:

$$f(n) = -2.2^{n-1}u(n-1) + 3.3^{n-1}u(n-1)$$

CHƯƠNG 4 SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

4.1 Số xấp xỉ, sai số tuyệt đối và tương đối

4.1.1. Số xấp xỉ

Trong tính toán kĩ thuật ta thường phải tớnh các giá trị gần đúng của các đại lượng.

Khái niệm: *a* được gọi là số xấp xỉ của số đúng *A* (kí hiệu là $a \approx A$) nếu như a sai khác so với *A* không đáng kể và thường dùng thay *A* vào quá trình tính toán.

- Nếu a < A ta có xấp xỉ thiếu
- Nếu a > A ta có xấp xỉ thừa

4.1.2. Sai số tuyệt đối

Định nghĩa 4.1: Xét lượng đúng *A* có giá trị gần đúng là *a*, khi đó

$$\Delta = |a - A|$$

gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ *a*.

Thông thường ta không thể xác định được Δ vì không biết chính xác được *A*, do đó ta đưa ra khái niệm về sai số tuyệt đối giới hạn.

Định nghĩa 4.2: Sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ *a* là một số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối Δ.

+ Gọi Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của *a*, suy ra

$$|a-A| \leq \Delta_a$$

hay

$$a - \Delta_a \leq A \leq \Delta_a + a.$$

Vậy $\left[a-\Delta_a; a+\Delta_a\right]$ được gọi là khoảng đáng tin cậy.

Từ đó ta có số đúng $A = a \pm \Delta_a$.

<u>Chú ý:</u>

Nếu Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của a thì mọi số $\Delta' > \Delta_a$ đều có thể được xem là sai số tuyệt đối giới hạn của *A*. Vì vậy trong thực tế ta phải chọn số dương bé nhất thoả mãn điều kiện $|a - A| \leq \Delta_a$.

4.1.3. Sai số tương đối

Sai số tuyệt đối không nói lên đầy đủ "chất lượng" của một số xấp xỉ. Để khắc phục nó ta đưa ra khỏi niệm sai số tương đối:

Định nghĩa 4.3: Tỉ số $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$ gọi là sai số tương đối giới hạn của a.

Ta có:

$$\Delta_a = |a|\delta_a$$

Suy ra

$$A = a \pm \Delta_a$$
$$= a(1 \pm \delta_a)$$

Trong thực tế ta coi: Δ_a là sai số tuyệt đối và δ_a là sai số tương đối.

<u>Chú ý:</u> Sai số tuyệt đối có cùng thứ nguyên với *A*, còn sai số tương đối không có thứ nguyên.

Sai số tương đối thường được tính theo %.

$$\delta_a(\%) = \frac{\Delta_a}{|a|}100\%$$

Ví dụ: Đo chiều dài đoạn thẳng AB được: *a =10* (m) với

$$\Delta_a = 0,05m$$
$$\delta_a = \frac{0,05}{10}$$
$$= 0,5\%$$

4.2 Cỏch viết số xấp xỉ

4.2.1. Chữ số có nghĩa

Ta biết một chữ số ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số, nhưng ta chỉ biết các chữ số từ chữ số khác không đầu tiên từ trái sang phải là chữ số có nghĩa.

Vớ dụ: Số 3,54 có 3 chữ số có nghĩa; số 0,0001 có một chữ số có nghĩa và số 0,00409 có 3 chữ số có nghĩa.

4.2.2. Chữ số đáng tin

Bất kỳ một số thập phân đều có thể biểu diễn dưới dạng.

$$a = \pm(\alpha_m.10^m + \alpha_{m-1}.10^{m-1} + ... + \alpha_{m-k}.10^{m-k} + ...) \quad (1)$$

Trong đó *m* là số nguyên, α_i là số tự nhiờn thỏa món

$$0 \le \alpha_i \le 9$$

với $\forall i$ thuộc tập số nguyờn.

Ví dụ: Số 32,435 có thể viết dưới dạng (1)

$$32,435 = 3.10^1 + 2.10^0 + 4.10^{-1} + 3.10^{-2} + 5.10^{-3}$$

Với $\alpha_1 = 3$; $\alpha_0 = 2$; $\alpha_{-1} = 4$; $\alpha_{-2} = 3$; $\alpha_{-3} = 5$;

Ta giả sử có số xấp xỉ *a* được biểu diễn dưới dạng (1) với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a.

Định nghĩa 4.4: Trong biểu thức (1) chữ số α_{m-k} gọi là số đáng tin nếu như $\Delta_a \le \frac{1}{2}.10^{m-k}$, gọi là số nghi ngờ nếu như $\Delta_a > \frac{1}{2}.10^{m-k}$.

Ví dụ 4.1

Xét một số xấp xỉ $a = 3,7284$ có $\Delta_a = 0,0047$. Khi đó, số 3, 7 và 2 là những chữ số đáng tin và cỏc chữ số 8 và 4 là những chữ số nghi ngờ.

Vỡ $\frac{1}{2}.10^{-2} = \frac{1}{2}.0,01 = 0,005 > \Delta_a$, 2 là số đáng tin.

Cũn $\frac{1}{2}.10^{-3} = 0.0005 < \Delta_a$, do đó 8 là chữ số đáng nghi.

<u>Chú ý:</u>

- Nếu α_{m-k} là chữ số đáng tin thì những chữ số bên trái nó cũng là số đáng tin.
- Nếu α_{m-k} là chữ số nghi ngờ thì tất cả những chữ số có nghĩa ở bên phải nó cũng là số nghi ngờ.

4.2.3. Cách viết số xấp xỉ

Có 2 cách để viết một số xấp xỉ cho một số đúng *A*.

- Cách 1: Viết số xấp xỉ *a* kèm theo sai số

$$A = a \pm \Delta_a \text{ hoặc}$$

$$\mathrm{A} = a(1 \pm \delta_a))$$

- Cách 2: Viết theo quy ước mọi chữ số có nghĩa là đáng tin. Nghĩa là sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a không lớn hơn $\frac{1}{2}$ đơn vị của chữ số cuối cùng bên phải.

Vớ dụ 4.2

Các bảng số cho sẵn như logarit thường in các số xấp xỉ theo quy ước trên.

4.3 Sự quy trũn và sai số quy trũn

4.3.1 Khái niệm

Trong tính toán khi gặp một số có quá nhiều chữ số đáng nghi, người ta phải bỏ đi một vài chữ số ở cuối cho gọn, việc làm đó gọi là quy tròn số.

Mỗi khi quy tròn một số người ta đã tạo ra một sai số mới gọi là sai số quy tròn.

Sai số quy tròn là $a_1 - a$

Sai số tuyệt đối quy tròn là $\theta_{a_1} = |a_1 - a|$

Quy tắc quy tròn

+ Quy tròn sao cho sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn $\frac{1}{2}$ đơn vị ở hàng được giữ lại cuối cùng.

+ Cụ thể: Nếu chữ số bỏ đi đầu tiên lớn hơn 5 thì thêm vào chữ số đó bên phải cuối cùng một đơn vị.

Nếu chữ số đầu tiên bỏ đi nhỏ 5 thì giữ nguyên chữ số cuối cùng bên phải.

Vớ dụ 4.3

Số 32,4873

- Quy tròn đến chữ số lẻ thập phân thứ 3 là 32,487
- Quy tròn đến chữ số lẻ thập phân thứ 2 là 32,49
- Quy tròn đến chữ số lẻ thập phân thứ 1 là 32,5

Sai số của số đã quy tròn

- Giả sử a là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a.

- Giả sử ta đã quy tròn a thành a_1 với sai số quy tròn tuyệt đối là θ_{a_1} tức là

$$|a_1 - a| \le \theta_{a_1}$$

Lúc đó ta có:

$$a_1 - A = a_1 - a + a - A$$

$$\Rightarrow |a_1 - A| \le |a_1 - a| + |a - A| = \theta_{a_1} + \Delta_a$$

$$\Rightarrow \Delta_{a_1} = \theta_{a_1} + \Delta_a$$

$$\Rightarrow \Delta_{a_1} > \Delta_a$$

Nghĩa là việc quy tròn số đã làm tăng sai số tuyệt đối giới hạn

4.4 Xỏc định sai số của hàm số khi biết sai số của đối số.

4.4.1. Công thức tổng quát

Cho hàm số khả vi $u = f(x_1, x_2........x_n)$

Giả sử ta biết sai số tuyệt đối giới hạn của các đối số Δ_{xi} (với *i = 1 ÷ n*). Từ đó ta phải tính sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối δ_u.

Ta lại có:

$$du = \frac{\partial u}{\partial_{x_1}} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial_{x_2}} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial_{x_n}} dx_n$$

$$\Delta_u \approx \frac{\partial u}{\partial_{x_1}} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial_{x_2}} \Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial_{x_n}} \Delta x_n$$

$$\approx \left| \frac{\partial u}{\partial_{x_1}} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial_{x_2}} .\Delta x_2 \right| + ... + \left| \frac{\partial u}{\partial_{x_n}} \Delta x_n \right|$$

Thông thường có 2 cách chọn:

Cách 1:

Chọn

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + ... + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\Delta x_n$$

Cách 2:

Chọn

$$\Delta_u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}.\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}.\Delta x_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}.\Delta x_n\right)^2}$$

Khi tính được $\Delta_u \Rightarrow \partial_u = \frac{\Delta_u}{|u|} \Rightarrow \partial_u \% = \frac{\Delta_u}{|u|}.100\%$

4.4.2. Một số trường hợp cụ thể

4.4.2.1 Sai số của tổng: $u = x_1 + x_2 + x_3 + ...x_u$

Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta_u &= \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n \\ &\le |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n|\end{aligned}$$

Ta cú thể chọn một trong hai cụng thức sau:

$$\Delta_u = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n|$$

hoặc

$$\Delta_u = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$$

Sai số tuyệt đối giới hạn của 1 tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối giới hạn của các số hạng.

4.4.2.2 Sai số của tích: $u = x_1 x_2$

Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 ; \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$$

Suy ra

$$\Delta_u = \left|x_2\right|.\Delta x_1 + \left|x_1\right|.\Delta x_2$$

hoặc

$$\Delta_u = \sqrt{x_2^2 \Delta x_1^2 + x_1^2 \Delta x_2^2}$$

4.4.2.3 Sai số của thương: $u = \frac{x_1}{x_2} \, (x_2 \neq 0)$

Ta có:

$$\Delta_u = \frac{\Delta x_1}{\left|x_2\right|} + \left|-\frac{x_1}{x_2^2}\right|.\Delta x_2$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta^2 x_1}{x_2^2} + \frac{x_1^2}{x_2^4} \Delta^2 x_2}$$

$$= \sqrt{\frac{x_2^2.\Delta^2 x_1 + x_1^2.\Delta^2 x_2}{x_2^4}}$$

CHƯƠNG 5 TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM THỰC CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ SIÊU VIỆT

5.1 Đặt vấn đề

Trong kĩ thuật ta thường phải tìm nghiệm của phương trình

$$f(x) = 0 \qquad (5.1)$$

trong đó, *f(x)* là một hàm số đại số hoặc hàm số siêu việt.

Giả sử *f(x)* là hàm số đại số:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \, (a_0 \neq 0)$$

Ta thấy để giải phương trình $f(x) = 0$ với *n=1, 2, 3, và 4* ta có cách giải cụ thể. Với $n \geq 5$ cộng với phương trình ở dạng không bình thường ta chưa có cụng thức để tìm nghiệm**.**

Giả sử *f(x)* là hàm số siêu việt: $f(x) = \sin x - x^2 - 1 = 0$ hiện nay chưa có lời giải.

Mặt khác trong kỹ thuật đôi khi người ta chỉ cần tìm nghiệm gần đúng của phương trình (5.1). Vì vậy người ta đưa ra một số cách để tìm nghiệm gần đúng của phương trình (5.1). Việc tìm nghiệm gần đúng của phương trỡnh (5.1) được chia làm 2 bước:

Bước 1: Tìm khoảng cách li nghiệm

Tức là tìm khoảng [a;b] để trong khoảng đó chỉ chứa đúng một nghiệm của phương trình (5.1).

Bước 2: Tách nghiệm gần đúng của phương trình (5.1) với độ chính xác yêu cầu.

5.2 Khoảng cỏch li nghiệm

5.2.1. Định nghĩa

Khoảng [*a;b*] nào đó gọi là khoảng cách li nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, nếu trong khoảng đó chỉ chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình đó.

5.2.2. Cách tìm khoảng cách li nghiệm

Cách 1: Phương pháp giải tích

Định lý 5.1

Nếu [*a;b*] là một khoảng trong đó hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu, đồng thời $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu, tức là $f(a).f(b) < 0$, thì [*a,b*] là một khoảng cách li nghiệm của $f(x) = 0$.

Nếu $f(x)$ có đạo hàm thì điều kiện đơn điệu có thể thay bằng điều kiện không đổi dấu của đạo hàm, suy ra ta có định lý 2.

Định lý 5.2

Nếu [*a,b*] là một khoảng trong đó hàm số $f(x)$ liên tục, đạo hàm $f(x)$ không đổi dấu, $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu thì [*a,b*] là khoảng cách li nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó khi tìm khoảng cách li của $f(x) = 0$ ta thường nghiên cứu sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ rồi áp dụng định lý 2.

Ví dụ 5.1

Tìm khoảng cách li nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^3 - 12x + 2 = 0$$

với tập xác định $\forall x \in R$.

Ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \text{ tại } x = \pm 2$$

Bảng biến thiên

X	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		$\nearrow$	18	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				-14		

Ta tính thêm giỏ trị của hàm số tại một số điểm:

$f(-4) = -64 + 48 + 2 = -14 < 0$

$f(-2) = 18 > 0$

$f(2) = 1- 12 + 2 = -9 < 0$

$f(4) = 64 - 48 + 2 = 18 > 0$

Hàm số đã cho có các khoảng cách li nghiệm là [-4;-2]; [-2;2] và [2,4]

Cách 2: Phương pháp đồ thị

Khi cú đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta sẽ xác định được khoảng cách li nghiệm. Trong trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ khó vẽ hoặc là các phương trình bậc cao, ta tách hàm $f(x)$ ra thành 2 hàm g(x) = h(x), sau đó vẽ đồ thị:

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là nghiệm của phương trình. Ta có thể xác định khoảng cách li nghiệm từ giao điểm này.

Vớ dụ 5.2

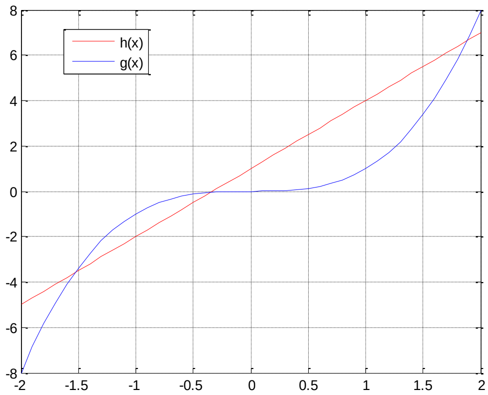
Tìm khoảng cách li nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Ta tách *f(x)* thành 2 hàm

$$\begin{cases} h(x) = 3x + 1 \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị của h(x) và g(x) trên cùng một hệ tọa độ như hỡnh 5.1.



Hỡnh 5.1 Độ thị hàm h(x) và g(x)

Từ đồ thị ta cú thể xác định được khoảng cách li nghiệm là: [-2;-1], [-1;0] và [0.5;2].

5.3 Phương pháp chia đôi

5.3.1 Nội dung phương pháp:

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có khoảng cách li nghiệm là $[a;b]$. Ta tìm cách thu nhỏ dần khoảng cách li nghiệm bằng cách chia đôi liên tiếp các khoảng cách li nghiệm đã tìm ra.

Trước hết ta chia đôi $[a;b]$, điểm chia là $c = \frac{a+b}{2}$ suy ra khoảng cách li nghiệm mới là: [a;c] hoặc [c;b].

Tính $f(c)$:

- Nếu $f(c) = 0$ thì c chính là nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$.

- Nếu $f(c) \neq 0$ thì ta so sánh dấu của $f(c)$ và $f(a)$.

- Nếu $f(c).f(a) < 0$ thì khoảng cách li nghiệm thu nhỏ là $[a;c]$.

- Nếu $f(c).f(a) > 0$ thì khoảng cách li nghiệm thu nhỏ là $[c;b]$.

Như vậy sau khi chia đôi khoảng $[a;b]$, ta được khoảng cách li nghiệm thu nhỏ là $[a;c]$ hoặc $[c;b]$, ta ký hiệu là $[a_1;b_1]$, nó nằm trong $[a;b]$ và chỉ dài bằng nửa khoảng $[a;b]$ tức là

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$$

Tiếp tục chia đôi khoảng $[a_1;b_1]$ và làm như trên ta được khoảng cách li nghiệm mới $[a_2;b_2]$ tương tự:

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b-a)$$

Lặp đi lặp lại việc làm như trên đến lần thứ *n* ta được khoảng cách li nghiệm thu nhỏ thứ *n*, kí hiệu là $[a_n;b_n]$, nó nằm trong khoảng [a;b] và dài là:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

5.3.2. Đánh giá sai số

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm là $x = \alpha$; tức là $f(\alpha) = 0$.

Nếu $[a_n;b_n]$ là khoảng cách li nghiệm của phương trình thì ta có:

$$a_n \le \alpha \le b_n$$

mà

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

Vậy nếu lấy a_n làm giá trị gần đúng của α, lúc đó sai số là:

$$|\alpha - a_n| \le b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n}$$

Nếu ta lấy b_n làm giá trị gần đúng của α, lúc đấy sai số là

$$|\alpha - b_n| \le b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n}$$

5.3.3. Sự hội tụ của phương pháp

Về lý thuyết ta có thể thực hiện vô hạn lần việc chia đôi khoảng cách li nghiệm. Khi *n* đủ lớn:

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{(b-a)}{2^n} \to 0$$

do vậy

$$a_n \to \alpha$$

$$b_n \to \alpha$$

Do đó ta nói phương pháp chia đôi hội tụ

Chú ý:

- Trong quá trình chia đôi liên tiếp, nếu gặp điểm chia mà tại đó giá trị của hàm *f = 0*, lúc đó ta được nghiệm đúng là: hoành độ của điểm chia đó.

Ví dụ 5.3

Cho phương trình $x^3 - x - 1 = 0$. Tõm nghiệm gần đúng với $n = 5$.

Để tõm nghiệm gần đúng bằng phương pháp chia đôi, ta có thể tớnh bằng tay hoặc viết chương trõnh phần mềm để tõm. Trong vớ dụ này chỳng ta sẽ viết chương trõnh trong Matlab để tõm nghiệm gần đúng. Chương trõnh được viết như sau:

```
n = 5;
a = zeros(1,n+1);
b = zeros(1,n+1);
a(1) = 1;
b(1) = 2;
fa = zeros(1,n+1);
fb = zeros(1,n+1);
c = zeros(1,n);
fc = zeros(1,n);
fa(1) = a(1)^3 - a(1) - 1;
fb(1) = b(1)^3 - b(1) - 1;
```

```
for i = 1:n;
    c(i) = (a(i)+b(i))/2;
    fc(i) = c(i)^3 - c(i) -1;
    if fc(i)*fa(i) < 0
        b(i+1) = c(i);
        a(i+1) = a(i);
        fb(i+1) = fc(i);
        fa(i+1) = fa(i);
    else
        a(i+1) = c(i);
        b(i+1) = b(i);
        fb(i+1) = fb(i);
        fa(i+1) = fc(i);
    end

end
```

Sau khi chạy chương trõnh ta cú kết quả như trong bảng 5.2. Ta cú thể chọn $\alpha = 1,34375$ là nghiệm gần đúng của phương trõnh trờn.

Sai số của phép tính là:

$$\frac{2-1}{2^5} = \frac{1}{2^5} = 0,03125.$$

Bảng 5.2 Khoảng cỏch nghiệm và giỏ trị của hàm

i	a_i	b_i	c_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$
1	1	2	1,5	-1	5	0,875
2	1	1,5	1,25	-1	0,875	-0,29688
3	1,25	1,5	1,375	-0,29688	0,875	0,22461
4	1,25	1,375	1,3125	-0,29688	0,22461	-0,051514
5	1,3125	1,375	1.34375	-0,051514	0,22461	0,082611

5.4 Phương phỏp lặp

5.4.1. Nội dung phương pháp.

Cho phương trình $f(x) = 0$. Giả sử phương trình có nghiệm thực α phân li trong khoảng $(a;b)$. Để tính được nghiệm gần đúng theo phương pháp lặp ta tiến hành theo các bước sau:

- Bước 1: Đưa phương trình $f(x) = 0$ về dạng tương đương $x = \varphi(x)$.
- Bước 2: Chọn bất kỳ $x_0 \in (a,b)$ làm nghiệm gần đúng đầu tiên.
- Tiếp theo với quy tắc $x_n = \varphi(x_{n-1})$ với $n = 1, 2, 3, \dots$.

Quy trình tính này có tính lặp đi lặp lại lên ở đây gọi là phương pháp lặp. Hàm φ gọi là hàm lặp.

Khi chuyển phương trình $f(x) = 0$ về phương trình tương đương $x = \varphi(x)$ có nhiều cách chuyển.

Vớ dụ 5.4

Phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ cú thể được biểu diễn như sau:

$$x = \varphi_1(x)$$
$$= x^3 - 1$$

hoặc

$$x = \varphi_2(x)$$
$$= \sqrt[3]{x+1}$$

Nhưng không phải hàm lặp nào cũng cho nghiệm gần đúng. Ở phần tiếp theo chỳng ta sẽ núi về điều kiện hội tụ của hàm lặp.

5.4.2. Điều kiện hội tụ

5.4.2.1 Định nghĩa:

Nếu dãy $x_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$ thì ta nói phương pháp lặp

$$\begin{cases} x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x_0 \in (a,b) \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

hội tụ.

Khi phương pháp lặp hội tụ thì x_n càng gần α nếu n càng lớn. Cho nên ta cú thể xem xem x_n, n đủ lớn, là giá trị gần đúng của α. Nếu phương pháp lặp không hội tụ thì x_n khác xa α . Vì vậy chỉ có phương pháp lặp hội tụ mới có giá trị.

Để kiểm tra phương pháp lặp có hội tụ hay không ta cú thể dựa vào cỏc định lý sau:

5.4.2.2. Định lý

Xét phương pháp lặp

$$\begin{cases} x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x_0 \in (a,b) \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Nếu các điều kiện sau được đáp ứng

1. (a,b) là khoảng phân li nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ hay $x = \varphi(x)$.

2. Mọi x_n tính theo phương trình lặp đều thuộc (a,b).

3. Hàm $\varphi(x)$ có đạo hàm thoả mãn

$$\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1; a < x < b \quad (q \text{ là hằng số})$$

thỡ phương pháp lặp hội tụ. Tức là,

$$x_n \to \alpha \text{ khi } n \to \infty.$$

Chứng minh:

Vì α là nghiệm của phương trình $x = \varphi(x)$, suy ra

$$\alpha = \varphi(\alpha) \quad (5.1)$$

Ta lại có:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (5.2)$$

Trừ (5.1) và (5.2) được:

$$\alpha - x_n = \varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1}) \quad (5.3)$$

Áp dụng công thức Lagrange vào vế phải của (5.3) có:

$$\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(c)(\alpha - x_{n-1})$$

Với

$$c \in (\alpha; x_{n-1})$$

Theo giả thiết ta có:

$$|\varphi'(c)| \le q < 1$$

do vậy

$$|\alpha - x_n| = |\varphi'(c)|.|\alpha - x_{n-1}| \le q|\alpha - x_{n-1}|$$

$$\Leftrightarrow |\alpha - x_n| \le q|\alpha - x_{n-1}| \qquad \forall n$$

Suy ra,

$$|\alpha - x_n| \le q^n |\alpha - x_0|$$

Vì x_0, α là cốc hằng số và $0<q<1$, $q^n|\alpha - x_0| \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $|\alpha - x_n| \to 0$ khi $n \to \infty$. Tức là x_n tiến tới nghiệm của phương trỗnh khi $n \to \infty$.

5.4.2.3. Đánh giá sai số

Ta có

$$|x_n - \alpha| \le q|x_{n-1} - \alpha|$$

$$VP = q|x_{n-1} - x_n + x_n - \alpha|$$

$$VP \le q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \alpha|$$

Suy ra,

$$|x_n - \alpha| \le \frac{q}{1-q}|x_{n-1} - x_n| \qquad (5.4)$$

Theo công thức số gia hữu hạn của Lagrange thì:

$$x_n - x_{n-1} = \phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2})$$

$$= \phi'(c_n)(x_{n-1} - x_{n-2})$$

$$|x_n - x_{n-1}| = |\phi'(c_n)||x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$\Rightarrow VP \le q|x_{n-1} - x_{n-2}| \qquad (5.5)$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \le q^{n-1}|x_1 - x_0|$$

Từ (5.4) và (5.5) suy ra

$$|x_n - \alpha| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Đây chính là công thức tính sai số nghiệm thực gần đúng của phương trình.

$$\Delta_\alpha = \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|$$

Để có nghiệm gần đúng x_n với độ chính xác ε cho trước thì số bước lặp *n* phải thoả mãn điều kiện

$$\frac{q^n}{1-q}\left|x_1 - x_0\right| \le \varepsilon .$$

Vớ dụ 5.5

Tính nghiệm của phương trình sau bằng phương pháp lặp sao cho $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le 10^{-4}$.

$$x^3 - 5x - 1 = 0 \quad (5.6)$$

Biết khoảng cách li nghiệm (2,3).

- **Bước 1:** Tìm hàm lặp $\varphi(x)$ để phương pháp hội tụ.

Từ (1) có:

$$\varphi(x) = x$$

$$= \frac{x^3 - 1}{5}$$

Suy ra,

$$\varphi'(x) = \frac{3}{5}x^2 > 1$$

với

$$\forall x \in (2;3)$$

Vậy $\varphi(x) = \dfrac{x^3 - 1}{5}$ không thoả mãn điều kiện hội tụ.

Từ (1) ta chọn

$$\varphi(x) = x$$

$$= (5x+1)^{1/3}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}\frac{5}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$$

$$< 1$$

với $\forall x \in (2;3)$.

Vậy ta cú thể chọn hàm lặp là:

$$\varphi(x) = (5x+1)^{1/3}$$

- **Bước 2:** Chọn x_0 bất kỳ thuộc (2;3).

Giả sử chọn $x_0 = 1.5$. Chương trỡnh được viết trong Matlab như sau:

```
n = 10;
x = zeros(1,n);
x0 = 1.5;
xi = x0;
d = x;
for i = 1:n
   x(i) = (5*x0+1)^(1/3);
   d(i) = x(i)- x0;
   x0 = x(i);
end
   m = [1:n;xi x(1:end-1);x;d]';
```

Kết quả thu được như bảng 5.3

Bảng 5.3 Nghiệm gần đúng sau mỗi bước lặp

n	x_{n-1}	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	1,5	2,0408	0,54083
2	2,0408	2,2377	0,19683
3	2,2377	2,3013	0,06368

4	2,3013	2,3212	0,01986
5	2,3212	2,3273	0,00613
6	2,3273	2,3292	0,00188
7	2,3292	2,3298	0,00057
8	2,3298	2,3300	0,00017
9	2,3300	2,3300	0,00005

Vậy nghiệm của phương trình (1) $\alpha \approx 2,3300$.

Tóm tắt phương pháp lặp:

1. Cho phương trình $f(x) = 0$
2. Chọn sai số cho phép ε
3. Xác định khoảng phân li nghiệm $(a;b)$
4. Tìm hàm lặp hội tụ $\varphi(x)$
5. Chọn xấp xỉ đầu x_0
6. Tính

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$
$$n = 1, 2, 3...$$

cho tới khi $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ thì dừng.

7. Kết quả: $\alpha \approx x_n$ với sai số

$$|x - x_n| \le \frac{q}{1-q}\varepsilon$$

trong đó q là số dương bộ hơn 1 thoả mãn

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \text{ với mọi } x \in (a,b).$$

5.5 Phương pháp Newton

5.5.1. Nội dung phương pháp

Xét phương trình *f(x) = 0* (5.7) với giả thiết phương trình có nghiệm thực α phân li trong khoảng (*a;b*).

Giả sử *f(x)* có đạo hàm khỏc khụng với mọi $x \in (a;b)$.

Chọn $x_0 \in (a;b)$.

Khai triển Taylo bậc nhất của *f(x)* tại x_0 ta có:

$$f(x_0) + (x - x_0) f^{'}(x_0) = 0 \qquad (5.8)$$

Như vậy ta đã thay phương trỡnh (5.7) bằng phương trỡnh (5.8).

Gọi x_1 là nghiệm của phương trỡnh (5.8) ta có:

$$f(x_0) + (x_1 - x_0) f^{'}(x_0) = 0$$

Suy ra,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$$

Một cỏch tổng quỏt ta cú thể tính được x_n khi biết x_{n+1} theo công thức sau:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} \qquad (5.9)$$

5.5.2. Nhận xét

a. Vì phương trình (5.8) dùng để thay cho (5.7) là tuyến tính nên phương pháp Newton cũng được gọi là phương pháp tuyến tính hoá.

b. Nhìn vào (3) ta thấy phương pháp Newton cũng là phương pháp lặp với hàm lặp:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f^{'}(x)}$$

c. Về mặt hình học ta thấy: $f'(x_0)$ chính là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm $y = f(x)$ tại x_0. Giả sử cung đồ thị AB giao với trục hoành tại M có hoành độ là nghiệm α. Để tính gần đúng α ta thay một cách gần đúng cung AB bởi tiếp tuyến tại B (có hoành độ x_0). Tiếp tuyến giao với trục hoành có hoành độ là x_1. Ta cú thể xem x_1 là giá trị gần đúng α. Phương trỡnh tiếp tuyến tại B:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Cho $y = 0$, ta cú

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Hay

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Vậy phương pháp Newton còn được gọi là phương pháp tiếp tuyến.

5.5.3. Sự hội tụ và sai số

Định lý:

Giả sử (a,b) là khoảng cách phân ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nếu

- *f* có đạo hàm f', f'' với f, f' liên tục trên $(a;b)$.
- *f'* và *f''* không đổi dấu trong (a;b).
- Xấp xỉ đầu x_0 chọn là a hay b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu *f''*.

Thỡ x_n tính theo cụng thức (3) hội tụ về α khi $n \to \infty$. Về sai số:

$$\left|x_n - \alpha\right| \le \frac{\left|f'(x_n)\right|}{m}$$

với $0 < m \le \left|f'(x)\right|,\ a \le x \le b$.

Trong thực tế thường ta dừng quá trình khi $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$ (sai số cho phép).

Ví dụ 5.6

Hãy tính căn bậc hai dương của một số dương a

Xét phương trình:

$$x^2 - a = 0$$

Ta có:

$$f'(x) = 2x > 0$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

Áp dụng định lý ta có:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

Giả sử a =2 ta có:

$$f\left(2\right) = 2^2 - 2 = 2 > 0$$

Vậy ta chọn xấp xỉ đầu $x_0 = 2$.

$$x_1 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2})$$
$$= 1,5$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(1,5 + \frac{2}{1,5})$$
$$= 1,417$$
$$x_3 = \frac{1}{2}(1,417 + \frac{2}{1,417})$$
$$= 1,41421$$

Ví dụ 5.7

Xét phương trình $x^3 - 5x - 1 = 0$. Ta đã chứng minh được rằng nó có nghiệm thực α phân li ở trong khoảng (2;3). Trong khoảng đó:

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 5$$
$$\geq 3.2^2 - 5$$
$$= 7$$
$$f^{''}(x) = 6x$$
$$\geq 12$$

Vỡ

$$f(3) = 3^2 - 5.3 - 1$$
$$= 27 - 16$$
$$> 0.$$

cùng dấu f'', ta chọn $x_0 = 3$. x_{n+1} được tớnh theo cụng thức sau:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n - 1}{3x_n^3 - 5}$$

Để tỡm cỏc nghiệm gần đúng ta có thể tớnh toỏn bằng tay theo cụng thức trờn hoặc viết chương trỡnh trong Matlab như sau:

```
x0 = 3;
a = x0;
n = 10;
x = zeros(1,n);
d = x;
for i=1:n
    x(i)=x0 - (x0^3-5*x0-1)/(3*x0^2-5);
    d(i)=x0-x(i);
    x0 = x(i);
end
m = [1:n;a x(1:end-1);x;d]';
```

Kết quả thu được thể hiện trong bảng 5.4.

Bảng 5.4 Nghiệm gần đúng sau mỗi bước lặp

n	x_{n-1}	x_n	$\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
1	3	2,5	0,5
2	2,5	2,3455	0,15455
3	2,3455	2,3302	0,01525
4	2,3302	2,3301	0,00014
5	2,3301	2,3301	$1,2*10^{-8}$

Vậy nghiệm của phương trình (1) $\alpha \approx 2{,}3301$, với sai số $|x_5 - x_4| \le 1{,}2*10^{-8}$.

5.6 Phương pháp dây cung

5.6.1. Nội dung phương pháp

Ở phương pháp Newton ta đã thay cung đồ thị AB của hàm *y = f(x)* bởi tiếp tuyến vẽ tại A hoặc B. Trong phương pháp dây cung ta thay cung AB bởi dây cung AB. Dây cung AB cắt trục hoành tại hoành độ x_1. Khi đó x_1 được coi là giá trị gần đúng của nghiệm α.

Phương trõnh dây cung AB như sau:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

Tại giao điểm ta có $y = 0$ và $x = x_1$.

$$\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}$$

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (1)$$

$$=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Phương pháp tính x_1 theo cụng thức (1) gọi là phương pháp dây cung. Sau khi tính được x_1, ta xét khoảng phân li nghiệm mới là [a, x_1] hoặc [x_1,b], rồi tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung vào khoảng phân li nghiệm mới. Cứ như vậy ta sẽ có nghiệm $x_n \approx$ α.

Sai số của phương pháp:

$$|x_n-\alpha|\le\frac{|f(x_n)|}{m}$$

Trong đó: $0 < m < \left| f^{'}(x) \right|$, $\forall$(x) $\in$ [$a;b$].

Ví dụ:

Xét phương trình x^3 - $5x$ - $1=0$. Khoảng phân li nghiệm đã biết là ($2;3$).

Ta có:

$$a = 1,$$

$$f(a) = f(2) = 8 - 10 - 1 = -3 < 0,$$

$$b = 3,$$

$$f(b) = f(3) = 27 - 15 - 1 = 11 > 0.$$

Theo cụng thức (1) có:

$$x_1 = \frac{2*11 - 3(-3)}{11 + 3}$$

$$= 2,21429$$

$$f(x_1) = f(2,21429)$$

$$= -1,21461$$

Vậy khoảng phân li nghiệm mới là ($2,21429;3$).

$$x_2 = \frac{2,21429*11 - 3(-1,21461)}{11 + 1,21461}$$

$$= 2,29242.$$

Tiếp tục tính như vậy ta sẽ có nghiệm $x_n \approx \alpha$. Tuy nhiờn phương pháp dây cung hội tụ chậm hơn phương pháp Newton.

CHƯƠNG 6
ĐA THỨC NỘI SUY VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

6.1 Đa thức nội suy

6.1.1.Đặt vấn đề

Trong thực tế nhiều khi phải phục hồi một hàm số *f(x)* tại mọi giá trị của x trên đoạn [*a;b*] bất kỳ mà ta chỉ biết một số hữu hạn giá trị của hàm số tại một số hữu hạn các điểm rời rạc của đoạn đó. Các giá trị đó được cung cấp qua thực nghiệm hay tính toán, dẫn tới một bài toán:

Trong [*a;b*] cho các điểm chia (điểm nút) x_i (*i = 0, 1, 2, ..., n*). Từ các giả thiết đó hãy xây dựng một đa thức bậc n.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

sao cho $P_n(x)$ trùng với *f(x)* tại các nút x_i nghĩa là:

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

Khi đó đa thức $P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm f(x).

6.1.2. Sơ đồ Hoocne

Ta có:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Suy ra,

$$P_n(x) = ((...(a_0x + a_1)x + a_2)x...)x + a_{n-1})x + a_n$$

Từ đó ta có sơ đồ để tính $P_n(c)$ như sau:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 \\ p_1 &= a_0.c + a_1 \\ &= p_0.c + a_1 \\ p_2 &= p_1.c + a_2 \\ &... \\ p_n &= p_{n-1}c + a_n \\ &= P_n(c) \end{aligned}$$

Đây được gọi là sơ đồ Hoocne. Sơ đồ này được sử dụng để tớnh giỏ trị của một đa thức tại một điểm bất kỳ một cách đơn giản và thuận tiện (chỉ cú phộp tớnh nhõn và cộng).

6.2 Đa thức nội suy Lagrange

6.2.1. Đặt vấn đề

Trên đoạn [*a;b*], cho một lưới các điểm chia x_i (*i = 0, 1, 2, ..., n*) thỏa món điều kiện:

$$a \le x_0, x_1, x_2, ..., x_n \le b$$

và tại các nút x_i giá trị của hàm *y = f(x)* là $y_i = f(x_i)$. Hãy tìm một đa thức $P_n(x)$ sao cho:

$$P_n(x_i) = y_i, \forall i = 0,1,2,...,n$$

Còn những giá trị *x* khác thì $P_n(x) \approx f(x)$

6.2.2. Thành lập đa thức

Xét đa thức

$$\begin{cases} l_i(x_j) = 0, \; j \neq i \\ l_i(x_j) = 1, \; j = i \end{cases}$$

Suy ra, $l_i(x)=0$ tại $x = x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$

Hay $l_i(x)=0$ có *n* nghiệm:

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$$

Vậy $l_i(x)$ có dạng như sau:

$$l_i(x) = a_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) \; (1)$$

Thay $x = x_i$ vào (1) ta có:

$$a_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Thay a_i vào biểu thức (1) ta có:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Đa thức nội suy $P_n(x)$ (bậc n) thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} P_n(x_i) = y_i \\ i = 0 \div n \end{cases}$$

sẽ có dạng sau:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x).y_i$$

Đa thức này được gọi là đa thức nội suy Lagarange. Thử lại ta thấy

$$P_n(x_j) = y_j$$

bởi vì

$$P_n(x_j) = l_0(x_j).y_0 + l_1(x_j).y_1 + ... + l_j(x_j).y_j + ... + l_n(x_j).y_n$$
$$= 0*1 + 0*1 + ... + 1*y_j + ... + 0*1$$
$$= y_j$$

6.2.3. Nội suy bậc nhất

Khi *n* = *1* ta có:

$$P_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

trong đó:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}; l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Suy ra $P_1(x)$ là đa thức nội suy bậc nhất có dạng:

$$P_1(x) = Ax + B$$

Vớ dụ: Cho giỏ trị của hàm số *y* = *f(x)* tại 2 điểm, xõy dựng đa thức nội suy cho hàm số này.

i	*0*	*1*
x	*1,5*	*3*
y	*6*	*9*

Theo cụng thức ta cú:

$$P_1(x) = \frac{x-3}{1,5-3} + 9\frac{x-1,5}{3-1,5}$$
$$= -4(x-3) + 6(x-1,5)$$
$$= 2x+3$$

6.2.4. Đa thức nội suy bậc 2

Khi *n = 2* ta có:

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

trong đó

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_1)(x_1-x_2)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Đa thức $P_2(x)$ là đa thức bậc 2 đối với *x* cú dạng:

$$P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Ví dụ:

Biết rằng đại lượng y là một đa thức bậc 2 của x và có bảng giỏ trị tại một số điểm như sau:

i	*0*	*1*	*2*
x_i	*0.78*	*1,56*	*2,34*
y_i	*2,5*	*1,2*	*1,12*

Hãy xõy dựng đa thức nội suy Lagrange.

Giải:

Đa thức nội suy bậc 2 ta có:

$$P_n(x) = l_0(x).y_0 + l_1(x).y_1 + l_2(x).y_2$$

trong đó:

$$l_0(x) = \frac{(x-1,56)(x-2,34)}{(0,78-1,56)(0,78-2,34)}$$

$$= \frac{x^2 - 3,9x + 3,65}{1,22}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0,78)(x-0,34)}{(1,56-0,78)(1,56-2,34)}$$

$$= \frac{x^2 - 3,12x + 1,82}{-0,61}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0,78)(x-1,56)}{(2,34-0,78)(2,34-1,56)}$$

$$= \frac{x^2 - 2,34x + 1,22}{1,22}$$

Vậy

$$P_2(x) = 2,5.l_0(x) + 1,2.l_1(x) + 1,12.l_2(x)$$

$$= 1,002\mathrm{x}^2 - 4,01\mathrm{x} + 5,045$$

Ví dụ: Cho bảng cóc giỏ trị của hàm số *y = f(x)* như sau:

i	*0*	*1*	*2*	*3*
x_i	*0*	*2*	*3*	*5*
y_i	*1*	*3*	*2*	*5*

Tìm công thức nội suy Lagrange cho hàm *f(x)*.

Ta có đa thức nội suy Lagrange như sau:

$$P_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}.1 + \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}.3$$

$$+\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)}.2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}.5$$

$$= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{16}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$$

6.3 Phương pháp bỡnh phương cực tiểu

6.3.1. Khái niệm

Đây là một phương pháp được ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật. Giả sử ta phải tìm quan hệ *y = f(x)*. Ta tiến hành thí nghiệm và đo đạc, sau đó thu được bảng kết quả sau:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Vấn đề đặt ra là: từ bảng thực nghiệm trên ta phải tìm quan hệ hàm số giữa *x* và *y* với một đánh giá chính xác nhất so với quan hệ thực của chúng bằng phương pháp bỡnh phương cực tiểu.

Ở đây ta chỉ xột một số hàm như sau:

$y = ax + b$

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a\sin x + b\cos x + c$

$y = ae^{bx}$

Theo thuật toán bỡnh phương cực tiểu: từ kết quả thực nghiệm ta phải tìm ra một hàm số gần đúng trong những các hàm ở trên và xác định các hàm số a, b, và c, sao cho:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - y_k \right]^2 \to \min$$

6.3.2. Các công thức thực nghiệm cụ thể

6.3.2.1. Trường hợp $y = ax + b$

Giả sử y phụ thuộc vào x cú dạng $y = ax + b$, khi đó ta phải tìm a và b sao cho S đạt giỏ trị nhỏ nhất.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[ax_k + b - y_k \right]^2 \to \min$$

Theo lý thuyết hàm nhiều biến, muốn S đạt cực tiểu thì a và b phải là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k).x_k = 0 \\ 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k).1 = 0 \end{cases}$$

Triển khai được:

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{1}^{n} x_k = \sum_{1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{1}^{n} x_k + nb = \sum_{1}^{n} y_k \end{cases}$$

Giải hệ tròn ta tìm được *a* và *b*.

Ví dụ: Cho biết sự phụ thuộc giữa hai đại lượng *x* và *y* có dạng $y = ax + b$ và bảng cỏc giỏ trị của hàm số tại các điểm như sau:

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
x_i	1,1	2,1	3,2	4,4	5,2
y_i	0,78	7,3	9,2	11,9	13,3

Hãy xác định *a* và *b* bằng phương pháp bình phương bé nhất.

Giải:

Để thuận tiện cho việc giải hệ phương trỡnh, ta lập bảng sau:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1,1	0,78	1,21	- 0,858
2	2,1	7,3	4,41	15,33
3	3,2	9,2	10,24	29,44
4	4,4	11,9	19,36	52,36
5	5,2	13,3	27,04	69,16
Σ	13,8	42,48	62,26	165,43

Ta cú hệ phương trỡnh:

$$\begin{cases} 62,26\text{a} + 13,8b = 165,43 \\ 13,8\text{a} + 5b = 42,48 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được: *a = 1,9935131* $\approx$ *2* và *b = 2,9939036* $\approx$ *3*. Suy ra, *y =2x +3*.

Đối với trường hợp $y = ae^{bx}$, ta làm như sau: Lấy lô ga cơ số e hai vế sẽ được *lny = lna + bx*. Đặt *Y = lny*, *X = x*, *A = b* và *B = lna*. Khi đó ta có dạng *Y = AX + B* giống với trường hợp trên.

6.3.2.2 Trường hợp $y = ax^2 + bx + c$

Ta có:

$$S = \sum_{1}^{n}\left[ax_k^2 + bx_k + c - y_k\right]^2 \rightarrow \min$$

Để S đạt giỏ trị nhỏ nhất thỡ đạo hàm của S theo cỏc tham số phải đồng thời bằng khụng, tức là a, b và c phải là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sum_{1}^{n}(ax_k^2 + bx_k + c - y_k).x_k^2 = 0 \\ 2\sum_{1}^{n}(ax_k^2 + bx_k + c - y_k).x_k = 0 \\ 2\sum_{1}^{n}(ax_k^2 + bx_k + c - y_k).1 = 0 \end{cases}$$

Triển khai ta có:

$$\begin{cases} a\sum_{1}^{n} x_k^4 + b\sum_{1}^{n} x_k^3 + c\sum_{1}^{n} x_k^2 = \sum_{1}^{n} x_k^2 y_k \\ a\sum_{1}^{n} x_k^3 + b\sum_{1}^{n} x_k^2 + c\sum_{1}^{n} x_k = \sum_{1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{1}^{n} x_k^2 + b\sum_{1}^{n} x_k + nc = \sum_{1}^{n} y_k \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được a, b và c.

Đối với trường hợp *y = asinx + bcosx+ c*, ta làm tương tự như trên bằng cỏch thay x_k^2 bởi sin(x_k) và x_k bởi cos(x_k) (chỳ ý $x_k^2 \neq x_k * x_k$ trong trường hợp này), sẽ thu được hệ phương trỡnh như sau:

$$\begin{cases} a\sum_{1}^{n} \sin^2(x_k) + b\sum_{1}^{n} \sin(x_k)\cos(x_k) + c\sum_{1}^{n} \sin(x_k) = \sum_{1}^{n} y_k \sin(x_k) \\ a\sum_{1}^{n} \sin(x_k)\cos(x_k) + b\sum_{1}^{n} \cos^2(x_k) + c\sum_{1}^{n} \cos(x_k) = \sum_{1}^{n} y_k \cos(x_k) \\ a\sum_{1}^{n} \sin(x_k) + b\sum_{1}^{n} \cos(x_k) + nc = \sum_{1}^{n} y_k \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được a, b và c.

Chương 7 Giải gần đúng phương trình vi phân thường

7.1 Đặt vấn đề

Trong kỹ thuật, một số bài toán được giải bằng cách giải phương trình vi phân thường. Ta có thể phân loại thành các dạng bài toán như sau:

Bài toán 1: Giải phương trình vi phân cấp 1

Tìm nghiệm của phương trình $y = f(x)$ thoả mãn $y' = g(x,y)$ biết điều kiện đầu là $y(x_0) = \alpha$ với $x_0 \le x \le a$, x_0, α và a cho trước.

Bài toán 2: Giải phương trình vi phân cấp n.

Tìm nghiệm của phương trình $y = f(x)$ thoả mãn $y^{(n)} = g(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ biết điều kiện đầu là $y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \alpha_1$, $y^{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1}$ với $x_0 \le x \le a$.

Bài toán 3: Giải hệ n phương trình vi phân cấp 1

Cho $\frac{d\underline{y}}{dx} = \underline{g}(x, \underline{y})$, trong đó $\underline{y} = [y_1 \quad y_2 \quad ... \quad y_n]^T$, $\underline{g} = (g_1 \quad g_2 \quad ... \quad g_n)^T$ và các điều kiện đầu: $\underline{y}(x_0) = \underline{\alpha}$, $\underline{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad ... \quad \alpha_n]^T$

Bằng phương pháp đổi biến, ta dễ dàng chuyển bài toán 2 về bài toán 3 để giải bằng cỏch đặt:

$$\frac{dy}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

...

$$\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = g(x, y, y_1, ..., y_{n-1})$$

Một số bài toán vi phân như:

- Phương trình có biến phân li.
- Phương trình đẳng cấp cấp 1.
- Phương trình tuyến tính cấp 1.

Có thể tìm nghiệm đúng của phương trình. Nhưng với bài toán 1 và bài toán 3 với *g(x,y)* có dạng bất kỳ thì không có phương pháp giải nghiệm đúng. Việc giải nghiệm gần đúng các bài toán 1 và 3 có vai trò rất quan trọng trong thực tế.

7.2 Phương pháp Euler

Cho $y'=g(x,y)$ biết điều kiện đầu là $y(x_0)=\alpha$ với $x_0 \le x \le a$, x_0 và α. Để tìm giá trị gần đúng của y chia $[x_0;a]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia x_i.

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0 \div n-1$$

$$x_n = a,\ h = \frac{a - x_0}{n}$$

Ký hiệu:

- $y(x)$ là nghiệm đúng tại x.
- $y(x_i)$ là nghiệm đúng tại x_i.
- y_i là nghiệm gần đúng của $y(x_i)$.

Giả thiết đã biết y_i tại x_i, cần tính y_{i+1} tại x_{i+1}. Khai triển Taylor tại x_i và bỏ qua các số hạng có đạo hàm bậc cao ta được.

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)\, y'(x_i)$$

Thay $x=x_{i+1}= x_i + h$ và $y'(x_i)=g(x_i, y(x_i))$ vào biểu thức trờn, ta cú:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hg(x_i,y(x_i))$$

Xấp xỉ $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$ và $y(x_i) = y_i$, suy ra

$$y_{i+1} = y_i + hg(x_i,y_i)$$

với $i = 0 \div n-1, y_0 = y(x_0) = \alpha$.

<u>Nhận xét:</u> Phương pháp này có ưu điểm là tính toán đơn giản, nhưng có nhược điểm là độ chính xác thấp.

Đối với bài toán 3, áp dụng phương pháp Euler được:

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + h\underline{g}(x_i,\underline{y}_i)$$

với $i = 0 \div n-1, \underline{y}_0 = \underline{y}(x_0) = \underline{\alpha}$.

7.3 Phương pháp Euler cải tiến

Áp dụng công thức Newton - Leipnit có:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx$$

Tính gần đúng tích phân xác định này bằng công thức hình thang sẽ được:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \frac{h}{2}[y'(x_{i+1}) + y'(x_i)] \quad (1)$$

Xấp xỉ $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$, $y(x_i) = y_i$, $y'(x_i) = g(x_i, y_i)$ và $y'(x_{i+1}) = g(x_{i+1}, y_{i+1})$. Khi đó ta có:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[g(x_i, y_i) + g(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad (2),$$

với $i = 0 \div n-1$, $y_0 = y(x_0) = \alpha$ đã biết.

Muốn tìm được y_{i+1} ta phải giải phương trình (2), đây là một nhược điểm của phương trình (2). Để giải phương trình (2) người ta sử dụng các công thức sau:

$$y_{i+1}^k = y_i + \frac{h}{2}[g(x_i, y_i) + g(x_{i+1}, y_{i+1}^{k-1})]$$

trong đó

$$y_{i+1}^{0} = y_i + hg(x_i, y_i)$$

Quá trình tính toán giá trị y_{i+1} được lấy xấp xỉ theo công thức $y_{i+1} = y_{i+1}^{k}$ với *k = 1, 2, ...*